

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO

MODELO MATEMÁTICO E ALGORITMO META-HEURÍSTICO PARA O
PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA
FIXA E RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL

CURITIBA

2016

LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO

MODELO MATEMÁTICO E ALGORITMO META-HEURÍSTICO PARA O
PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA
FIXA E RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração Programação Matemática, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Luzia Vidal de Souza

CURITIBA

2016

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de LILIAN CAROLINE XAVIER CANDIDO, intitulada: "MODELO MATEMÁTICO E ALGORITMO META-HEURÍSTICO PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA FIXA E RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação.

Curitiba, 05 de Agosto de 2016.



Prof LUZIA VIDAL DE SOUZA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



Prof DEISE MARIA BERTHOLDI COSTA

Avaliador Interno (UFPR)



Prof MARIA TERESINHA ARNS STEINER

Avaliador Interno (UFPR)



Prof LEANDRO MAGATAO

Avaliador Externo (UTFPR)

Por vídeo conferência

Prof LEONARDO JUNQUEIRA

Avaliador Externo (UNINOVE)

Aos meus amados pais, Ruberval e Inês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de qualquer forma contribuíram para a realização desta etapa do Doutorado.

A Deus, por me conceder a vida, e por conduzir e iluminar o meu caminho com sua graça divina durante toda a minha trajetória.

Aos meus pais, Ruberval Candido e Inês de Souza Xavier Candido, por estarem sempre ao meu lado, me dando amor e incentivo para que eu atingisse meus objetivos, que também são os seus; ao meu irmão Raul Xavier Candido, pela amizade e carinho; e aos meus sobrinhos João e Francisco, pela ternura e alegria motivadoras que eles representam em nossa vida.

Ao meu namorado, Marcus Vinicius Guedes Schiavini, pelo amor, companheirismo e cuidado, pelo amparo e incentivo durante a minha insegurança na conclusão da tese, e pela compreensão em todos os momentos em que não pude estar ao seu lado durante o desenvolvimento da mesma.

À minha orientadora, Professora Luzia Vidal de Souza, por ter confiado em mim e em minhas ideias, pelas cobranças nos momentos necessários, pelo incentivo e contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, professores Leonardo Junqueira, Leandro Magatão, Deise Maria Bertholdi Costa e Maria Teresinha Arns Steiner, pelas sugestões e valiosas contribuições para o trabalho.

Aos amigos do PPGMNE, pelas discussões, ajudas, incentivos, pelas palavras boas nos momentos de preocupação ou simplesmente pelas alegrias que compartilhamos nos intervalos de folga; e à minha querida amiga Tatiane Cazarin da Silva com quem, além de tudo isso, ainda compartilhei as angústias e alegrias do final do doutorado.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Departamento Acadêmico de Matemática do câmpus Campo Mourão, por me conceder afastamento integral das atividades docentes, sem o qual dificilmente seria possível desenvolver este trabalho; e ao Professor Adilandri Mercio Lobeiro, que contribuiu diretamente para a sua viabilização.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Os problemas integrados de roteamento e carregamento de veículos tratam simultaneamente de dois importantes problemas de otimização combinatória: o Problema de Roteamento de Veículos e o Problema do *Bin Packing*. Neste trabalho estudou-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-HFFVRP - *Two Dimensional Loading Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*), cujo objetivo consiste em encontrar o conjunto de roteiros de mínimo custo a ser realizado por uma frota limitada de veículos de diferentes capacidades e custos, determinando ainda o arranjo geométrico da carga nos veículos, considerando os itens de demanda dos clientes e as superfícies de carregamento dos veículos elementos retangulares. Além das restrições clássicas do problema de roteamento de veículos e das restrições geométricas do carregamento, considerou-se a restrição do carregamento sequencial, que garante que seja possível descarregar os itens de um cliente sem a necessidade de movimentação dos itens dos clientes que serão atendidos posteriormente no roteiro. Foi desenvolvida uma formulação matemática para o 2L-HFVRP, validada por experimentos computacionais que mostraram que a formulação proposta é capaz de representar matematicamente o problema, no entanto é possível obter soluções ótimas em tempo computacional aceitável apenas para problemas consideravelmente pequenos. Também foi proposto um algoritmo meta-heurístico baseado em *Simulated Annealing* e Busca Local para resolução do 2L-HFFVRP, que utiliza um conjunto de métodos heurísticos para determinar o carregamento dos veículos. O desempenho deste algoritmo foi testado sobre instâncias geradas a partir das instâncias da literatura, e observou-se que, embora as soluções obtidas não sejam ótimas, o algoritmo consegue encontrar boas soluções em um tempo computacional aceitável.

Palavras-chaves: Roteamento de veículos. Carregamento bidimensional. Frota heterogênea fixa. *Simulated Annealing*.

ABSTRACT

Integrated vehicle routing and loading problems treat two important combinatorial optimization problems: the Vehicle Routing Problem and the Bin Packing Problem. In this work the Two-Dimensional Loading Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem is studied. This problem aims at finding a set of routes of minimum cost to be performed by a limited fleet of vehicles of different capacities and costs, also determining the loading of items into vehicles, once customers demands bidimensional items. Besides the classical constraints of vehicle routing problem and geometric loading restrictions, the sequential loading constraint, that ensures that items of a customer should be unloaded without handling items of other customers, is also considered. A mathematical model for 2L-HFFVRP was developed, and validated by computational experiments, that show the proposed model can represent mathematically the problem, although it is possible to find optimal solutions in acceptable computational time just for small problems. A meta-heuristic algorithm based on Simulated Annealing and local search is proposed for solving 2L-HFFVRP, and uses a pack of heuristics to generate vehicles loading. The performance of this algorithm was tested on instances generated from the instances of literature, and it was observed that although the solutions obtained are not optimal, the algorithm can find good solutions in an acceptable computational time.

Key-words: Vehicle Routing. Two-dimensional loading. Heterogeneous fixed fleet. Simulated Annealing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS	17
FIGURA 2 – TAXONOMIA PARA PROBLEMAS DE ROTEAMENTO	20
FIGURA 3 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO BÁSICOS . .	25
FIGURA 4 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO INTERME- DIÁRIOS: MAXIMIZAÇÃO DAS SAÍDAS	26
FIGURA 5 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO INTERME- DIÁRIOS: MINIMIZAÇÃO DAS ENTRADAS	27
FIGURA 6 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO BIDIMEN- SIONAL	31
FIGURA 7 – ESTRATÉGIAS PARA O EMPACOTAMENTO EM NÍVEIS	33
FIGURA 8 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL .	35
FIGURA 9 – CARREGAMENTO SEQUENCIAL PARA O 2L-CVRP	36
FIGURA 10 – VALORES POSSÍVEIS PARA O ÍNDICE t	42
FIGURA 11 – SUPERFÍCIE DE CARREGAMENTO DO VEÍCULO	45
FIGURA 12 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE OS ITENS	46
FIGURA 13 – CARREGAMENTO NÃO-SEQUENCIAL E CARREGAMENTO SEQUENCIAL	48
FIGURA 14 – CARREGAMENTO DOS VEÍCULOS PARA O PROBLEMA P9- CLASSE 5 NO CASO SEQUENCIAL	55
FIGURA 15 – CARREGAMENTO DOS VEÍCULOS PARA O PROBLEMA P9- CLASSE 5 NO CASO IRRESTRITO	56
FIGURA 16 – PROCESSO DE CARREGAMENTO DE ITENS	58
FIGURA 17 – POSIÇÕES INFECTÍVEIS PARA O CARREGAMENTO SEQUEN- CIAL	59
FIGURA 18 – CÁLCULO DO PERÍMETRO DE CONTATO NA HEURÍSTICA <i>Max Touching Perimeter</i>	60
FIGURA 19 – CÁLCULO DO PERÍMETRO DE CONTATO NA HEURÍSTICA <i>Max Touching Perimeter no Walls</i>	60
FIGURA 20 – ÁREA RETANGULAR NA HEURÍSTICA <i>Min Area</i>	61
FIGURA 21 – ÁREAS RETANGULARES NA HEURÍSTICA Área Mínima Resul- tante	62
FIGURA 22 – ALGORITMO <i>Simulated Annealing</i>	65
FIGURA 23 – PROCEDIMENTO <i>DeterminaVeiculos()</i>	66
FIGURA 24 – PROCEDIMENTO <i>SolucaoInicial()</i>	67
FIGURA 25 – MOVIMENTO <i>Troca(1,0)</i>	69
FIGURA 26 – MOVIMENTO <i>Troca(1,0)</i>	69

FIGURA 27 – MOVIMENTO 2-opt-inter	69
FIGURA 28 – MOVIMENTO TrocaInt(1,0)	70
FIGURA 29 – MOVIMENTO TrocaInt(1,0)	71
FIGURA 30 – MOVIMENTO 2-opt-intra	71
FIGURA 31 – PROCEDIMENTO <i>TemperaturaInicial()</i>	73
FIGURA 32 – ALGORITMO SA-BL	77

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – INFORMAÇÕES DOS CLIENTES	52
TABELA 2 – CARACTERÍSTICAS DOS PROBLEMAS	53
TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO PARA O 2L-HFFVRP SEQUENCIAL	54
TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO PARA O 2L-HFFVRP IRRESTRITO	54
TABELA 5 – CARACTERÍSTICAS DOS ITENS DAS CLASSES 2-5	78
TABELA 6 – CARACTERÍSTICAS DOS TIPOS DE VEÍCULOS	80
TABELA 7 – CARACTERÍSTICAS DAS INSTÂNCIAS PARA O 2L-HFFVRP .	82
TABELA 8 – PARÂMETROS PARA O ALGORITMO SA-BL	83
TABELA 9 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 1	85
TABELA 10 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 2 - CASO SEQUENCIAL	86
TABELA 11 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 3 - CASO SEQUENCIAL	87
TABELA 12 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 4 - CASO SEQUENCIAL	88
TABELA 13 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 5 - CASO SEQUENCIAL	89
TABELA 14 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 2 - CASO IRRESTRITO	90
TABELA 15 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 3 - CASO IRRESTRITO	91
TABELA 16 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 4 - CASO IRRESTRITO	92
TABELA 17 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 5 - CASO IRRESTRITO	93

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO	14
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO	14
1.3 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	14
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	15
 2 REVISÃO DE LITERATURA	 16
2.1 PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS	16
2.1.1 O Problema de Roteamento de Veículos Capacitado	16
2.1.2 Variações para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado	19
2.1.3 O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea	21
2.1.4 Estudos sobre os Problemas de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea	22
2.2 PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO	23
2.2.1 Classificação dos Problemas de Empacotamento	24
2.2.2 Restrições para o Problema do Carregamento de Contêineres	28
2.2.3 Problemas de Empacotamento Bidimensionais	30
2.2.4 Estudos sobre os Problemas de Empacotamento Bidimensionais	31
2.3 PROBLEMAS INTEGRADOS DE ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS	33
2.3.1 Problemas de Roteamento de Veículos com Restrições de Carregamento Bi- dimensional	34
2.3.2 O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional	37
2.3.3 Estudos sobre o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional	38
 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O 2L-HFFVRP	 41
3.1 DESCRIÇÃO FORMAL DO PROBLEMA	41
3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA FIXA	42
3.3 RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL	43
3.4 RESTRIÇÕES PARA O CARREGAMENTO SEQUENCIAL	47
3.5 FORMULAÇÃO COMPLETA PARA O 2L-HFFVRP	49
3.6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS	51
3.6.1 Descrição dos Problemas Utilizados nos Testes	51
3.6.2 Resultados Obtidos	53

4	ALGORITMO <i>SIMULATED ANNEALING</i> PARA O 2L-HFFVRP	57
4.1	HEURÍSTICAS PARA O CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL	57
4.2	A META-HEURÍSTICA <i>SIMULATED ANNEALING</i>	62
4.2.1	Caracterização das Soluções	64
4.2.2	Solução Inicial	65
4.2.3	Estrutura de Vizinhança	68
4.2.4	Busca Local	70
4.2.5	Temperatura Inicial	71
4.2.6	Estratégia de Resfriamento	72
4.3	ALGORITMO SA-BL PARA O 2L-HFFVRP	74
4.4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	75
4.4.1	Descrição das Instâncias Utilizadas nos Testes	75
4.4.2	Configuração dos Parâmetros para o SA-BL	83
4.4.3	Resultados Obtidos	84
5	CONCLUSÃO	95
	Referências	97

1 INTRODUÇÃO

A atividade econômica do setor logístico vem crescendo e se destacando no Brasil nas últimas décadas, devido ao impulsionamento das atividades industriais e de serviços no país. O transporte de matéria-prima e bens de consumo é uma das atividades de maior destaque na área da logística.

Quando são analisadas questões reais enfrentadas por empresas que transportam produtos, sejam elas embarcadoras ou operadoras logísticas, entende-se que decisões relacionadas a este tema requerem métodos rápidos e eficientes de otimização matemática, capazes de minimizar os custos envolvidos. Empresas desta categoria se deparam, cotidianamente, com problemas de tomada de decisão relacionados, dentre outros, ao roteamento dos veículos e ao carregamento das cargas a serem transportadas.

O Problema de Roteamento de Veículos (VRP - *Vehicle Routing Problem*) é um problema clássico de otimização combinatória no qual deve-se determinar um roteiro para uma frota de veículos que irão atender a um conjunto de clientes, objetivando minimizar os custos envolvidos que, na maioria das aplicações, trata-se da distância total percorrida (DANTZIG; RAMSER, 1959; CLARKE; WRIGHT, 1964). Em geral, este problema é encontrado na gestão da entrega física de bens e serviços, mas possui também muitas outras aplicações. Por este motivo, pode apresentar muitas variações, dependendo da especificidade do problema a ser resolvido: natureza dos bens a serem transportados, cunho do serviço a ser prestado, características dos clientes e dos veículos. Uma das variantes mais comuns do Problema de Roteamento de Veículos é encontrada no caso em que os veículos possuem uma mesma capacidade que não pode ser excedida, que caracteriza o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP - *Capacitated Vehicle Routing Problem*).

O Problema do *Bin Packing* (BPP - *Bin Packing Problem*), que faz parte da classe dos problemas de corte e empacotamento, também é um problema de otimização combinatória. Nele, é dado um conjunto de itens que devem ser carregados em um conjunto de objetos, de modo a atender a algum objetivo que, geralmente, consiste em maximizar o valor dos itens carregados, no caso de um único objeto disponível, ou minimizar o número de objetos necessários para carregar todos os itens (DOWSLAND; DOWSLAND, 1992; DYCKHOFF; FINKE, 1992).

O tratamento do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado juntamente com o Problema do *Bin Packing* representa uma abordagem mais realista do primeiro problema. A cada veículo deve ser atribuído um roteiro que visita um conjunto de clientes, entregando a cada cliente um conjunto de itens. Os custos envolvidos devem ser minimizados, e os itens dos clientes pertencentes a um roteiro devem ser carregados no veículo que atende a este roteiro, respeitando certas características geométricas.

Se os itens em questão forem caixas, e se não for permitido o empilhamento

das mesmas, isto é, se uma caixa não puder ser carregada sobre uma outra caixa, então apenas as dimensões da base das caixas e da superfície de carregamento do veículo são relevantes para o problema. Neste caso, o problema é chamado Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-CVRP - *Two Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem*) (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007). Por outro lado, se uma caixa puder receber outras caixas sobre ela, tem-se o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Restrições de Carregamento Tridimensional (3L-CVRP - *Three Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem*) (GENDREAU *et al.*, 2006).

Tanto o 2L-CVRP quanto o 3L-CVRP são extensões do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado, ao qual são acrescentadas restrições acerca do carregamento geométrico das caixas nos veículos. No CVRP, todos os veículos possuem a mesma capacidade, isto é, a frota é homogênea. Quando considera-se que a frota é heterogênea, tem-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (HFVRP - *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*), que possui duas variações: o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa (HFFVRP - *Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*), quando o número de veículos é limitado; e o Problema de Dimensionamento e Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (FSMVRP - *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*), quando se dispõe de um número ilimitado de veículos e a composição da frota também deve ser determinada.

Se forem adicionadas restrições de carregamento ao Problema de Roteamento de Veículos Capacitado com Frota Heterogênea, obtém-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-HFVRP - *Two Dimensional Loading Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*) e o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Tridimensional (3L-HFVRP - *Three Dimensional Loading Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*).

A partir do 2L-HFVRP, têm-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-HFFVRP - *Two Dimensional Loading Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problem*) e o Problema de Dimensionamento e Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-FSMVRP - *Two Dimensional Loading Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*). Leung *et al.* (2013) propõem um método meta-heurístico para resolução do 2L-FSMVRP, porém, na vasta revisão de literatura realizada, nenhuma abordagem para solução do 2L-HFFVRP foi encontrada.

1.1 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO

Neste trabalho, tratar-se-á do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-HFFVRP). Assim, será estudado o Problema de Roteamento de Veículos no qual os veículos disponíveis possuem capacidades diferentes, caracterizando uma frota heterogênea, e uma superfície retangular disponível para carregamento. A cada cliente deve ser entregue um conjunto de itens, que devem ser carregados sobre a superfície do veículo sem que se sobreponham ou excedam as dimensões da mesma.

Serão estudadas duas variações do problema: o caso Irrestrito e o caso Sequencial. No caso Sequencial, os itens devem ser carregados no veículo de acordo com a posição na rota que o cliente ocupa, isto é, primeiramente devem ser carregados os itens do último cliente a ser visitado, enquanto os itens do primeiro cliente a ser atendido devem ser carregados por último. O caso Irrestrito não leva em conta tal restrição. Supõe-se, ainda, que os itens possuem orientação fixa, isto é, não podem ser rotacionados durante ou após o carregamento.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo geral o estudo do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-HFFVRP). São objetivos específicos deste estudo:

1. Desenvolver um modelo de programação matemática para o 2L-HFFVRP, incluindo as restrições de carregamento sequencial;
2. Desenvolver e implementar um algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing* para resolver o problema;
3. Analisar o desempenho do modelo matemático e do algoritmo meta-heurístico, por meio da resolução de problemas obtidos da literatura.

1.3 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Em toda a vasta revisão de literatura realizada, não foi encontrado nenhum estudo para solução do 2L-HFFVRP. No entanto, do ponto de vista econômico, o 2L-HFFVRP possui alta relevância, pois é um problema tratado cotidianamente pelos setores de logística das empresas. Além disso, por se tratar da integração de dois problemas de otimização

combinatória NP-difíceis, o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e o Problema do *Bin Packing* Bidimensional, consiste também em um problema NP-difícil, ou seja, não pode ser resolvido em tempo computacional polinomial, o que o torna extremamente interessante do ponto de vista teórico.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O desenvolvimento das ideias expostas neste trabalho obedece à seguinte estrutura:

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os Problemas de Roteamento de Veículos, os Problemas de Empacotamento e os Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos, que combinam os dois primeiros. Nesta última categoria de problemas, situa-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional e faz-se uma revisão das metodologias já aplicadas para resolvê-lo.

O Capítulo 3 contém o desenvolvimento de uma formulação matemática para o problema estudado. Além disso, são apresentados os resultados obtidos pelo modelo proposto para problemas gerados a partir de instâncias da literatura. Também é feita uma discussão destes resultados para analisar o desempenho do modelo desenvolvido.

No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo *Simulated Annealing* desenvolvido para resolução do 2L-HFFVRP, e as heurísticas para verificação da factibilidade do carregamento para um roteiro. O desempenho do método proposto é avaliado para problemas maiores, obtidos da literatura, e os resultados são apresentados e discutidos.

Por fim, o Capítulo 5 tece considerações concernentes ao estudo desenvolvido e apresenta oportunidades de exploração para novos trabalhos.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo será apresentado um estudo bibliográfico acerca dos Problemas de Roteamento de Veículos e será situado o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea nesta classe de problemas. Do mesmo modo, revisaremos os Problemas de Empacotamento chegando à descrição dos Problemas de Empacotamento Bidimensionais e das restrições de cunho prático pertinentes aos mesmos. Por fim, serão apresentados os Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos e, especificamente, os Problemas de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições Bidimensionais de Carregamento.

2.1 PROBLEMAS DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Os Problemas de Roteamento, em geral, consistem em determinar o roteiro de viagem a ser realizado por um ou mais veículos com o menor custo possível, podendo este custo ser avaliado, dentre outros critérios, em função da distância total percorrida.

Laporte e Osman (1995) compilaram uma bibliografia a respeito de quatro problemas clássicos de roteamento: Problema do Caixeiro Viajante (TSP - *Travelling Salesman Problem*), Problema de Roteamento de Veículos (VRP - *Vehicle Routing Problem*), Problema do Carteiro Chinês (CPP - *Chinese Postman Problem*) e Problema do Carteiro Rural (RPP - *Rural Postman Problem*). O foco deste trabalho restringe-se Problema de Roteamento de Veículos.

2.1.1 O Problema de Roteamento de Veículos Capacitado

O Problema de Roteamento de Veículos foi proposto inicialmente por Dantzig e Ramser (1959), que apresentaram um problema real de entrega de combustível no qual uma frota de caminhões idênticos deveria servir um conjunto de clientes, e propuseram a primeira abordagem de solução para o problema, aprimorada anos mais tarde por um método heurístico apresentado por Clarke e Wright (1964). Desde então, tal problema tem sido objeto de interesse dos estudiosos da Pesquisa Operacional, sendo um dos problemas de otimização combinatória mais estudados até os dias de hoje, em virtude de sua relevância prática e de seu nível de dificuldade de solução.

A versão elementar do problema, da qual derivam todas as variações, é o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (CVRP - *Capacitated Vehicle Routing Problem*). Revisões bibliográficas acerca do CVRP podem ser encontradas em Bodin *et al.* (1983),

Laporte e Nobert (1987), Laporte (1992), Laporte e Osman (1995), Fisher (1995), Toth e Vigo (2002a), Cordeau *et al.* (2007), Laporte (2007), Golden, Raghavan e Wasil (2008) e Laporte (2009).

No CVRP, tem-se um depósito central e um conjunto de clientes. Cada cliente possui uma localização e uma demanda conhecidos, e são conhecidos também os custos de viagem entre o depósito e os clientes, e entre os clientes. Um conjunto de veículos idênticos com uma dada capacidade está disponível no depósito, para servir o conjunto de clientes. O problema consiste em determinar um conjunto de rotas de custo mínimo de modo que: (i) cada rota inicie e termine no depósito, (ii) cada cliente seja visitado exatamente por um veículo, e (iii) a soma das demanda dos clientes atendidos em uma rota não exceda a capacidade do veículo. A FIGURA 1 ilustra um exemplo de CVRP com 8 clientes e 3 veículos.

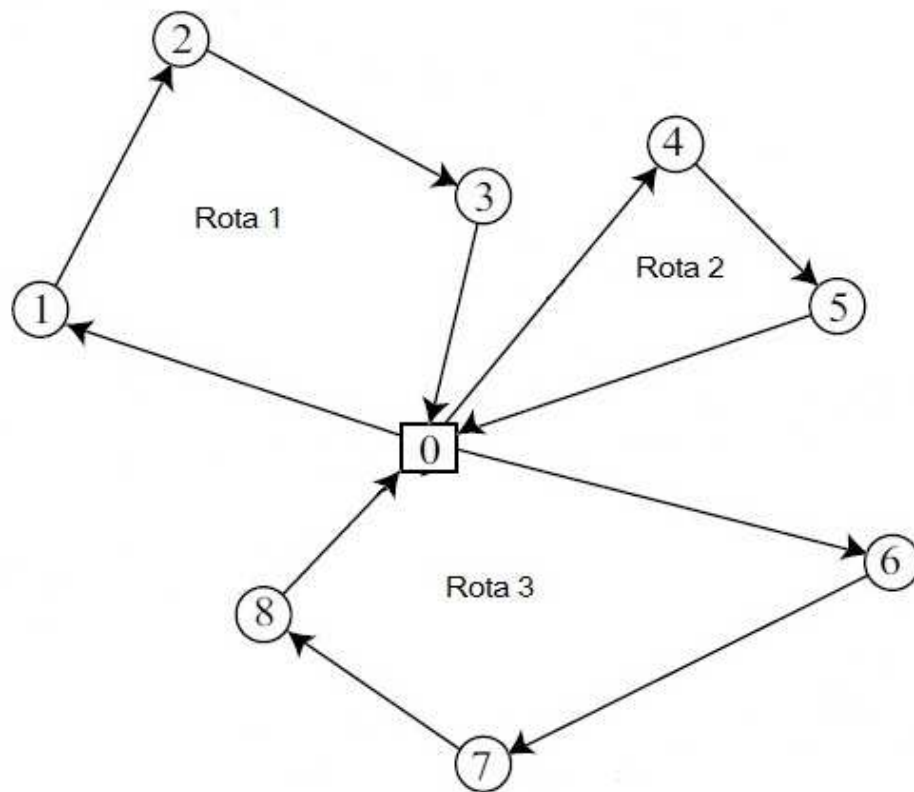


FIGURA 1 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Fonte – Adaptado de Gendreau *et al.* (2008)

Em mais de cinquenta anos de estudo, muitos métodos foram propostos para resolução do CVRP, contemplando métodos exatos e aproximados. Os métodos exatos compreendem algoritmos *Branch-and-Bound* (TOTH; VIGO, 2002b), algoritmos *Branch-and-Cut* (NADDEF; RINALDI, 2002) e algoritmos baseados no recobrimento de conjuntos (BRAMEL; SIMCHI-LEVI, 2002). Os melhores resultados obtidos para o CVRP são encontrados em Fukasawa *et al.* (2006), que utiliza uma formulação baseada em particionamento de conjuntos e planos de corte, e em Baldacci, Christofides e Mingozzi (2008),

que também utiliza uma formulação baseada em particionamento de conjuntos.

Também é possível encontrar na literatura muitas heurísticas clássicas para resolução do CVRP, que são métodos nos quais a cada passo obtém-se uma solução factível para o problema. Os métodos heurísticos para o CVRP podem ser divididos em métodos de construção de rotas e métodos de melhoria de rotas (LAPORTE; SEMET, 2002).

Os algoritmos de construção de rotas estão entre os primeiros métodos desenvolvidos para solucionar o CVRP. Estes algoritmos iniciam com uma solução vazia e constroem as rotas a partir da inserção de um ou mais clientes a cada iteração. O algoritmo dos *savings* de Clarke e Wright (1964) é a primeira e mais famosa heurística construtiva da literatura, e se baseia na redução de custo (*saving*) obtida por se atender dois clientes na mesma rota, em vez de atendê-los em duas rotas separadas. O algoritmo inicia com a criação de n sub-rotas (utilizando n veículos), uma para cada cliente. A cada iteração, o algoritmo elimina um veículo através da construção de uma nova sub-rota a partir da combinação de duas outras sub-rotas já existentes, até que nenhuma combinação possa mais ser feita. A combinação das sub-rotas é feita com base na ordenação decrescente dos *savings* e respeitando as restrições de capacidade dos veículos.

Alguns algoritmos de construção de rotas consistem em métodos em duas fases, que separam a solução do CVRP em duas etapas: *clusterização*, que separa os clientes em subconjuntos sendo que cada subconjunto está associado a uma rota; e *roteirização*, que determina a sequência na qual os clientes serão atendidos em cada rota. Em geral, os métodos em duas fases são métodos do tipo *cluster-first-route-second*, que primeiramente agrupam os clientes e depois definem as rotas. O algoritmo de Fisher e Jaikumar (1981) é um algoritmo para resolução do CVRP em duas fases. Ele resolve a etapa da *clusterização* através de um Problema de Designação apropriadamente definido e, quando os *clusters* estão definidos, um Problema do Caixeiro Viajante obtém a rota de cada *cluster*. Por outro lado, os métodos *route-first-cluster-second* determinam, na primeira etapa, uma rota que contém todos os clientes e, na segunda etapa, esta rota maior é dividida em rotas factíveis menores, como foi feito no algoritmo proposto por Beasley (1983).

Já as heurísticas de melhoria de rotas correspondem a algoritmos de busca local aplicados para melhorar soluções iniciais obtidas por outras heurísticas. Dada uma solução inicial, a busca local opera mudanças simples iterativamente como, por exemplo, a troca de arcos, a fim de obter soluções vizinhas com custo menor. Dois tipos de heurísticas de melhoria podem ser utilizados: métodos intra-rotas aprimoram cada rota separadamente por meio de heurísticas de melhoria para o TSP, e métodos inter-rotas melhoram a solução final por meio da troca de clientes entre as rotas. A heurística *k-opt* (LIN, 1965) é o método de melhoria de rotas mais amplamente conhecido e utilizado. Nesta heurística, k arcos são removidos de uma solução atual e substituídos por outros k arcos, se tal substituição melhorar a solução do problema.

Devido à complexidade do CVRP, nas últimas décadas foi desenvolvida uma vasta

gama de métodos meta-heurísticos para resolução do mesmo. As meta-heurísticas são métodos robustos que podem englobar no espaço de busca até mesmo soluções ineficazes, com o intuito de encontrar um ótimo global, e podem ser divididas em três categorias básicas: meta-heurísticas baseadas em busca local, na qual se inclui, dentre outras, Busca Tabu e Simulated Annealing; meta-heurísticas baseadas em busca populacional, como por exemplo Algoritmos Genéticos; e meta-heurísticas baseadas em mecanismos de aprendizagem, como Redes Neurais Artificiais e Colônia de Formigas. Em Gendreau, Laporte e Potvin (2002) e Cordeau *et al.* (2005) podem ser encontradas compilações dos métodos meta-heurísticos para resolução do CVRP.

2.1.2 Variações para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado

Um número considerável de variações para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado pode ser obtido a partir da adição de características realistas que representem as necessidades práticas de quem lida com roteamento. Variações complexas, que correspondem a abordagens mais realistas, têm sido chamadas de Problemas Ricos de Roteamento de Veículos (*Rich Vehicle Routing Problems*). Lahyani, Khemakhem e Semet (2015) propuseram recentemente uma taxonomia completa e detalhada para estes problemas (FIGURA 2), na qual eles são classificados de acordo com duas classes que os autores chamaram de características do cenário (SCs) e características físicas do problema (PPCs). Esta taxonomia é organizada em forma de árvore com três níveis: nível estratégico, nível tático e nível operacional, sendo os dois primeiros níveis relacionados às características do cenário e o último às características físicas do problema.

A combinação do problema clássico de roteamento de veículos com as subclasses citadas na FIGURA 2 fornecem variações para o CVRP. Algumas destas variações são:

Problema de Roteamento de Veículos Estocástico (SVRP - *Stochastic Vehicle Routing Problem*): Os dados para o problema são variáveis aleatórias e seus valores estão associados a distribuições de probabilidade. Em geral, os parâmetros estocásticos estão relacionados às demandas dos clientes.

Problema de Roteamento de Veículos Dinâmico (DVRP - *Dynamic Vehicle Routing Problem*): Os parâmetros podem ser modificados durante a execução do planejamento. Por exemplo, novos pedidos de clientes podem ser recebidos enquanto as rotas estão sendo executadas, e o roteiro previsto no início do período de planejamento pode ser ajustado.

Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Depósitos (MDVRP - *Multi-Depot Vehicle Routing Problem*): Ao invés de um único depósito como no problema

1. Características do Cenário

- 1.1 Dados de entrada
 - 1.1.1 Estáticos
 - 1.1.2 Dinâmicos
 - 1.1.3 Determinísticos
 - 1.1.4 Estocásticos
- 1.2 Componentes de tomada de decisão
 - 1.2.1 Roteamento
 - 1.2.2 Inventário e roteamento
 - 1.2.3 Localização e roteamento
 - 1.2.4 Roteamento e programação de motoristas
 - 1.2.5 Planejamento da produção e distribuição
- 1.3 Número de depósitos
 - 1.3.1 Único
 - 1.3.2 Múltiplos
- 1.4 Tipo de operação
 - 1.4.1 Coleta ou entrega
 - 1.4.2 Coleta e entrega
 - 1.4.3 *Backhauls*
 - 1.4.4 *Dial-a-ride*
- 1.5 Restrições de entrega fracionada
 - 1.5.1 Entrega fracionada permitida
 - 1.5.2 Entrega fracionada não permitida
- 1.6 Período de planejamento
 - 1.6.1 Período único
 - 1.6.2 Múltiplos períodos
- 1.7 Uso múltiplo dos veículos
 - 1.7.1 Viagem única
 - 1.7.2 Múltiplas viagens

2. Características Físicas do Problema

- 2.1 Veículos
 - 2.1.1 Tipo
 - 2.1.1.1 Homogêneos
 - 2.1.1.2 Heterogêneos
 - 2.1.2 Número
 - 2.1.2.1 Fixo
 - 2.1.2.2 Ilimitado
 - 2.1.3 Estrutura
 - 2.1.3.1 Compartimentado
 - 2.1.3.2 Não compartimentado
 - 2.1.4 Restrições de capacidade
 - 2.1.5 Política de carregamento
 - 2.1.5.1 Ordem cronológica
 - 2.1.5.2 Nenhuma
 - 2.1.6 Regulamentações dos motoristas
- 2.2 Restrições de tempo
 - 2.2.1 Restrições no cliente
 - 2.2.2 Restrições no acesso às estradas
 - 2.2.3 Restrições no depósito
 - 2.2.4 Tempo de serviço
 - 2.2.5 Tempo de espera
- 2.3 Estrutura de janela de tempo
 - 2.3.1 Janela de tempo única
 - 2.3.2 Múltiplas janelas de tempo
- 2.4 Restrições de incompatibilidade
- 2.5 Restrições específicas
- 2.6 Função objetivo
 - 2.6.1 Objetivo único
 - 2.6.2 Múltiplos objetivos

FIGURA 2 – TAXONOMIA PARA PROBLEMAS DE ROTEAMENTO

Fonte – (LAHYANI; KHEMAKHEM; SEMET, 2015)

clássico, há múltiplos depósitos que podem ter características distintas. As rotas devem iniciar e terminar em algum depósito dentre os depósitos existentes.

Problema de Roteamento de Veículos com Coletas e Entregas (VRPPD - *Vehicle Routing Problem with Pickups and Deliveries*): A cada cliente podem ser efetuadas entregas e/ou coletas. As mercadorias podem ser transportadas do depósito para clientes, de clientes para o depósito ou de clientes para clientes. Deve-se observar que no segundo caso existe a relação de precedência entre as operações de coleta e entrega, pois a coleta em um cliente deve preceder a entrega no cliente de destino.

Problema de Roteamento de Veículos com Entregas Fracionadas (SDVRP - *Split Delivery Vehicle Routing Problem*): Cada cliente pode ser atendido mais de uma vez e por mais de um veículo.

Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (HFVRP - *Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*): Ao contrário do problema clássico de roteamento de veículos, no qual os veículos são idênticos, o HFVRP considera veículos com diferentes características.

Problema de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo (VRPTW - *Vehicle Routing Problem with Time Window*): O atendimento a cada cliente deve iniciar dentro de um período de tempo especificado.

Uma destas variações será descrita a seguir, o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea, que é a base para o problema a ser estudado neste trabalho.

2.1.3 O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea

Dentre as inúmeras variações para o CVRP, será dado foco ao caso em que são considerados veículos com diferentes capacidades e custos, que caracteriza o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea, tratado pela primeira vez por Golden *et al.* (1984).

Diferentemente do que acontece no problema clássico de roteamento de veículos, os veículos disponíveis no depósito para atendimento aos clientes constituem uma frota heterogênea, isto é, composta por diferentes tipos de veículos. A cada tipo de veículo pode ser associado um custo fixo - se o veículo for utilizado - e um custo variável - proporcional à distância da rota percorrida pelo veículo.

Belfiore, Favero e Alvarez (2006) mencionam duas variações para o problema: O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa (HFFVRP - *Heterogeneous Fixed Fleet Vehicle Routing Problems*), quando o número de veículos disponíveis é limitado; e o Problema de Dimensionamento e Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (FSMVRP - *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*), quando o número de veículos disponível é ilimitado. Neste caso, o problema trata da composição da frota de forma integrada ao roteamento. Neste trabalho trataremos do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa. Pode-se ainda encontrar na literatura abordagens em que os custos fixos e/ou custos variáveis não são considerados.

Um estudo amplo sobre problemas de roteamento de veículos com frota heterogênea é encontrado em Baldacci, Battarra e Vigo (2008). A próxima seção traz uma compilação dos métodos para resolução destes problemas.

2.1.4 Estudos sobre os Problemas de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea

O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea é uma generalização do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado e, por esse motivo, é um problema np-difícil. Devido a sua complexidade intrínseca, as abordagens para solução do mesmo encontradas na literatura compreendem essencialmente métodos heurísticos e meta-heurísticos que, na sua maioria, derivam das heurísticas para o CVRP homogêneo. No entanto, o problema em seu caso heterogêneo é consideravelmente mais difícil de se resolver pois a verificação da factibilidade das rotas é feita levando-se em conta o veículo que atende a rota, ao contrário do caso homogêneo no qual todos os veículos possuem a mesma capacidade.

A primeira proposta para solução de Problemas de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea é encontrada em Golden *et al.* (1984). Os autores resolveram o problema com frota ilimitada através de uma heurística que adapta o algoritmo de *savings* de Clarke e Wright (1964), em que quatro diferentes expressões foram propostas para incorporar o conceito de frota heterogênea no cálculo dos *savings*, e também propuseram um método em duas fases do tipo *route-first-cluster-second*, que primeiramente cria uma rota infactível com todos os clientes e depois a particiona em rotas factíveis menores.

Taillard (1999) propôs uma heurística baseada na geração de colunas, capaz de resolver o problema com número ilimitado ou limitado de veículos. Inicialmente constrói-se um conjunto de rotas através da resolução, por meio de um algoritmo Busca Tabu, de um CVRP homogêneo para cada tipo de veículo. Então, a partir destas rotas seleciona-se o conjunto final de rotas através da resolução de um problema de particionamento de conjuntos, para garantir que cada cliente seja atendido por um único veículo.

Muitas meta-heurísticas para resolução do HFVRP também são encontradas na literatura. Uma delas é a meta-heurística BATA (*Back-Tracking Adaptive Threshold Accepting*), desenvolvida por Tarantilis, Kiranoudis e Vassiliadis (2004) para o problema com frota fixa. O método inicia com uma solução inicial obtida por meio de uma heurística construtiva. Depois são geradas soluções vizinhas pela implementação de movimentos escolhidos aleatoriamente dentre três movimentos propostos. A solução vizinha é avaliada e, se a diferença entre seu valor e a solução corrente for menor que um valor máximo estipulado ela é aceita. Este valor máximo é alterado a cada iteração, podendo diminuir no caso da solução vizinha ser aceita, ou aumentar no caso oposto, a fim de possibilitar a diversificação da vizinhança.

Ainda para o problema com frota fixa, outros métodos foram propostos, como o algoritmo *record-to-record* de Li, Golden e Wasil (2007), que consiste em uma variação determinística do *Simulated Annealing*, e o algoritmo MAMP (*Multistart Adaptive Memory Programming*) de Li, Tian e Aneja (2010), que constrói múltiplas soluções provisórias que são melhoradas por uma Busca Tabu modificada. Busca Tabu também foi utilizada

por Brandão (2011), em um algoritmo que se inicia com um roteiro que contém todos os clientes e é dividido em rotas menores, que são melhoradas pela aplicação de quatro tipos de movimentos.

Subramanian *et al.* (2012) trata ambos os casos do problema, com frota fixa e ilimitada. Em um algoritmo híbrido, uma heurística baseada em busca local iterada é utilizada para gerar colunas em uma formulação de particionamento de conjuntos. O método foi aprimorado pelos mesmos autores por meio da inclusão de uma vizinhança variável e de uma ordem aleatória da vizinhança à busca local iterada (PENNA; SUBRAMANIAN; OCHI, 2013).

Baldacci e Mingozzi (2009) desenvolveram um método exato para resolução de problemas de roteamento com frota heterogênea, baseado numa formulação de particionamento de conjuntos. O algoritmo proposto usa três tipos de relaxação do problema. Os limites inferiores obtidos permitem reduzir o número de variáveis da formulação matemática e o modelo resultante pode ser resolvido por *solvers* para problemas de programação linear inteira. Os testes realizados em instâncias retiradas da literatura mostram resultados satisfatórios para todas as variações do HFVRP consideradas no trabalho.

2.2 PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO

Os Problemas de Empacotamento são problemas de otimização combinatória que pertencem à classe dos Problemas de Corte e Empacotamento. Problemas de corte e problemas de empacotamento são equivalentes, visto que o primeiro trata da divisão de um objeto maior em itens menores, enquanto o segundo aborda o empacotamento de itens menores em objetos maiores. O problema em foco neste trabalho trata das restrições de carregamento dos veículos em um problema de roteamento, e por isso todos os conceitos serão definidos e reportados no âmbito dos problemas de empacotamento. Revisões acerca desta classe de problemas são encontradas em Dyckhoff e Finke (1992) e Dowsland e Dowsland (1992).

Serão considerados dois conjuntos de elementos, que podem ser definidos em espaços de uma, duas, três ou mais dimensões: um conjunto de elementos maiores, que serão chamados de objetos; e um conjunto de elementos menores, serão chamados de itens. O problema de empacotamento consiste em selecionar um subconjunto com alguns ou todos os itens, e agrupá-los em um ou mais objetos, a fim de otimizar uma função objetivo estabelecida. Devem, ainda, ser satisfeitas as seguintes condições: (i) as dimensões dos itens do subconjunto selecionado não ultrapassam as respectivas dimensões do objeto ao qual foram alocadas e (ii) não haja sobreposição dos itens alocados em um objeto. Uma solução para o problema pode resultar em usar um ou mais objetos, e alguns ou todos os itens serem carregados nestes objetos.

2.2.1 Classificação dos Problemas de Empacotamento

Conforme as especificidades do problema a ser resolvido, algumas propriedades podem ser consideradas para a formulação de tipos específicos de problemas de empacotamento. Wäscher, Haußner e Schumann (2007) propuseram uma classificação na qual os problemas de empacotamento são separados em categorias referentes às seguintes características:

Dimensionalidade: A dimensionalidade define o número de dimensões necessárias para a descrição do padrão de empacotamento. Considerando-se apenas os aspectos espaciais, um problema pode ser da forma:

Unidimensional: O empacotamento é feito em apenas uma dimensão.

Bidimensional: Neste caso, duas dimensões, largura e comprimento, são relevantes para o problema. Esses problemas são encontrados, por exemplo, no empacotamento de caixas em veículos, nos casos em que não há empilhamento das caixas.

Tridimensional: Nestes problemas, uma terceira dimensão é considerada. Problemas tridimensionais acontecem, por exemplo, nas empresas de transporte que desejam minimizar o número de viagens realizadas por seus veículos e, por isso, têm que empacotar as caixas nos mesmos da melhor maneira possível.

Problemas com mais que três dimensões são obtidos quando são tratados também aspectos não-espaciais, como, por exemplo, o tempo para a execução de uma tarefa.

Tipo de atribuição: Este atributo pode se apresentar em duas diferentes situações:

Maximização das saídas: Neste caso, o conjunto de objetos não é suficiente para acomodar todos os itens, de modo que o problema é resolvido para que o número máximo de itens seja empacotados, ou os itens empacotados correspondam à maior área, volume ou alguma outra medida de qualidade do empacotamento.

Minimização das entradas: Neste caso, os objetos são suficientes para acomodar todos os itens, e o problema é resolvido de modo que os itens sejam empacotados no conjunto de objetos que apresente menor quantidade ou custo, dependendo do objetivo a ser alcançado.

Sortimento dos itens: Os itens a serem empacotados podem ser idênticos, isto é, apresentar mesma forma e tamanho; fracamente heterogêneos, podendo ser divididos em poucos grupos de itens idênticos com demandas relativamente grandes; ou fortemente heterogêneos, quando poucos itens possuem mesma forma e tamanho e, portanto, a quantidade de cada tipo de item é muito pequena ou até mesmo única.

Sortimento dos objetos: O conjunto dos objetos pode ser composto por um único objeto, que pode ter extensão fixa ou apresentar dimensões com extensão variável; ou composto por vários objetos, que por sua vez podem ser idênticos, fracamente heterogêneos ou fortemente heterogêneos, assim como os itens.

Forma dos itens: No caso de problemas bi ou tridimensionais, os itens a serem empacotados podem ser classificados quanto à sua forma: itens regulares (retângulos, círculos, cubos) ou itens não regulares.

A combinação dos tipos de atribuição e do sortimento dos itens gera os tipos de problemas básicos propostos por Wäscher, Haußner e Schumann (2007), mostrados na FIGURA 3.

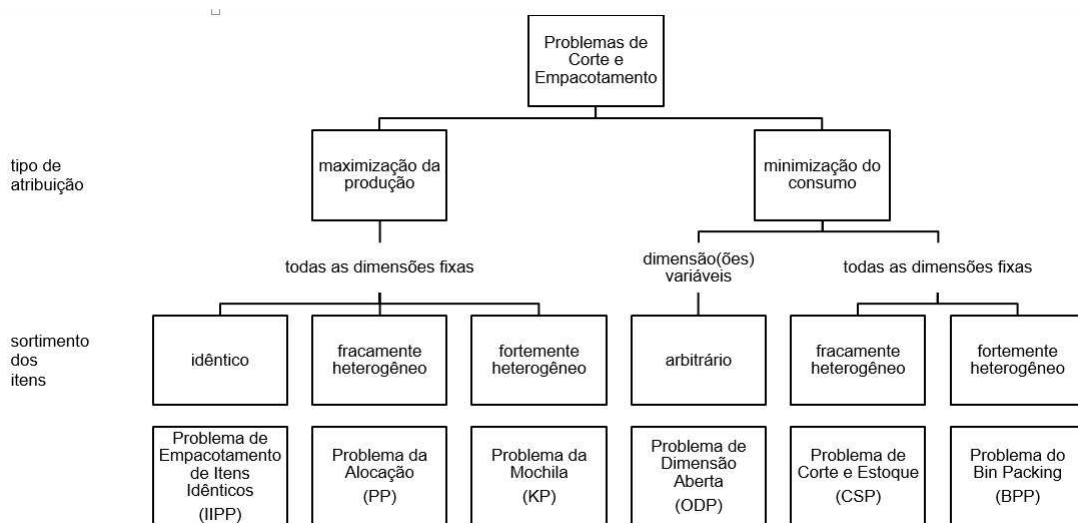


FIGURA 3 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO BÁSICOS

Fonte – (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007)

Nos problemas de maximização das saídas, objetiva-se alocar nos objetos o conjunto de itens que otimize a função objetivo, de acordo com o sortimento dos mesmos. Deste modo, em geral, estes problemas consistem na seleção dos itens que serão empacotados.

O **Problema de Empacotamento de Itens Idênticos** (IIPP - *Identical Item Packing Problem*) requer que sejam empacotados itens idênticos em um conjunto limitado de objetos. Por se tratar de itens idênticos, não existe nessa classe a necessidade de seleção de itens a serem empacotados, e o problema se reduz ao arranjo geométrico dos itens nos objetos.

No **Problema da Alocação** (PP - **Placement Problem**) e no **Problema da Mochila** (KP - *Knapsack Problem*), um conjunto de itens fracamente e fortemente heterogêneos, respectivamente, deve ser alocado aos objetos disponíveis, maximizando a quantidade de itens de tal conjunto.

O **Problema de Dimensão Aberta** (ODP - *Open Dimensional Problem*) define um problema de minimização das entradas, no qual todos os itens devem ser alocados em

um único objeto, que apresenta uma ou mais dimensões variáveis. Deste modo, o problema consiste basicamente em minimizar a extensão das dimensões variáveis do objeto.

Nos outros dois problemas de minimização das entradas, o **Problema de Corte de Estoque** (CSP - *Cutting Stock Problem*) e **Problema do Bin Packing** (BPP - *Bin Packing Problem*), um conjunto de itens fraca e fortemente heterogêneos, respectivamente, deve ser completamente empacotado no melhor conjunto de objetos, atendendo ao objetivo do problema.

Acrescentando aos problemas básicos os critérios de classificação em relação ao sortimento dos objetos, obtêm-se os tipos de problemas intermediários. A FIGURA 4 e a FIGURA 5 mostram, respectivamente, os tipos de problemas intermediários propostos por Wäscher, Haußner e Schumann (2007) para os casos de maximização das saídas e minimização das entradas.

características dos objetos \ sortimento dos itens		Idênticos	fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
todas as dimensões fixas	um único objeto	Problema de Empacotamento de Itens Idênticos IIPP	Problema da Alocação em um Único Objeto SLOPP	Problema da Mochila Única SKP
	idênticos	X	Problema da Alocação em Múltiplos Objetos Idênticos MILOPP	Problema das Múltiplas Mochilas Idênticas MIKP
	heterogêneos		Problema da Alocação em Múltiplos Objetos Heterogêneos MHLOPP	Problema das Múltiplas Mochilas Heterogêneas MHKP

FIGURA 4 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO INTERMEDIÁRIOS: MAXIMIZAÇÃO DAS SAÍDAS

Fonte – (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007)

Nos problemas de roteamento de veículos, a demanda dos clientes não pode exceder a capacidade dos veículos. Se a demanda dos clientes for dada pelos itens, e os veículos forem os objetos, a forma como os veículos serão carregados pode ser determinada pelo Problema do *Bin Packing*. O caso unidimensional do BPP está relacionado ao clássico Problema de Roteamento de Veículos Capacitado, pois a capacidade dos veículos bem como a demanda dos clientes é expressa geralmente em termos de peso ou volume. Já os casos bidimensional e tridimensional do BPP estão relacionados ao Problema de Roteamento de Veículos com Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-CVRP) e ao Problema de Roteamento de Veículos com Restrições Tridimensionais de Carregamento (3L-CVRP) respectivamente. Os Problemas de Empacotamento tridimensionais nos quais

características dos objetos \ sortimento dos itens		fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
todas as dimensões fixas	idênticos	Problema de Corte e Estoque de Objetos de Tamanho Único SSSCSP	Problema do <i>Bin Packing</i> de bins de Tamanho Único SBSBPP
	fracamente heterogêneos	Problema de Corte e Estoque de Objetos de Tamanhos Diferentes MSSCSP	Problema do <i>Bin Packing</i> de bins de Tamanhos Diferentes MBSBPP
	fortemente heterogêneos	Problema de Corte e Estoque Residual RCSP	Problema do <i>Bin Packing</i> Residual RBPP
um único objeto dimensão(ões) variável(is)		Problema de Dimensão Aberta ODP	

FIGURA 5 – TIPOS DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO INTERMEDIÁRIOS: MINIMIZAÇÃO DAS ENTRADAS

Fonte – (WÄSCHER; HAUSSNER; SCHUMANN, 2007)

cargas são carregadas em contêineres ou veículos em geral são chamados de Problemas do Carregamento de Contêineres (CLP - *Container Loading Problems*).

Diferentes formulações matemáticas podem ser utilizadas para modelar os Problemas de Empacotamento e por decorrência também os Problemas de Carregamento de Contêineres. Chen, Lee e Shen (1995) apresentam um modelo de programação inteira para o carregamento de contêineres, considerando múltiplos contêineres, caixas de diferentes tamanhos, e possibilidade de rotação das caixas, e mostram ainda como incluir restrições de distribuição de peso das caixas na formulação proposta. Um modelo de programação linear inteira binária é proposto por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), no qual os autores consideram em sua formulação as restrições de estabilidade vertical e horizontal e as restrições de empilhamento. Uma abordagem semelhante é fornecida em Junqueira, Morabito e Yamashita (2012a) na qual são consideradas restrições de múltiplos destinos.

Dentre os métodos exatos para solução dos Problemas de Empacotamento destacam-se os algoritmos *Branch-and-Bound* (MARTELLO; PISINGER; VIGO, 2000) e as abordagens baseadas em Programação Dinâmica (HIFI, 2004). No entanto os métodos exatos são capazes de resolver apenas problemas de tamanho reduzido. São os métodos heurísticos e meta-heurísticos que têm obtido os melhores resultados para problemas maiores em um tempo computacional aceitável (GONÇALVES; RESENDE, 2012). Em Bortfeldt e Wascher (2013) é possível encontrar um levantamento dos métodos mais eficazes para a resolução de alguns problemas de carregamento de contêineres.

2.2.2 Restrições para o Problema do Carregamento de Contêineres

Algumas considerações concernentes ao aspecto prático do carregamento propostas para o Problema do Carregamento de Contêineres (BORTFELDT; WASCHER, 2013) são descritas a seguir.

Tais restrições são estabelecidas para problemas de empacotamento tridimensionais. Apesar disto, no caso em que apenas as dimensões da base dos itens a serem carregados são relevantes, que recai em um problema de carregamento bidimensional, as mesmas também podem ser consideradas, com exceção das restrições de empilhamento e estabilidade vertical, que não se fazem pertinentes.

Restrições relacionadas aos veículos: Em relação aos veículos pode-se ter as seguintes restrições:

Limites de peso: O peso das caixas carregadas em um veículo não podem exceder um limite máximo pré-estabelecido que, em geral, corresponde à capacidade do veículo. Uma restrição equivalente diz respeito à relação entre o volume (ou área da base) das caixas e da região do veículo disponível para carregamento.

Distribuição do peso: Também chamadas de restrições de balanceamento, requerem que o peso das caixas seja distribuído da forma mais uniforme possível sobre a base do veículo, pois se o peso das caixas for distribuído de forma muito desigual dentro do veículo, algumas operações de movimentação do mesmo podem ser impossíveis de ser realizadas. Para evitar este problema, é desejável que o centro de gravidade do veículo carregado esteja localizado próximo do centro geométrico do plano que define sua base.

Restrições relacionadas às caixas: Para as caixas, tem-se:

Prioridades de carregamento: Nos problemas de maximização das entradas os veículos disponíveis não são suficientes para carregar todas as caixas, de modo que é preciso selecionar quais caixas serão carregadas. Dentre todas as caixas, algumas podem ter maior prioridade de carregamento que as outras.

Orientação das caixas: Considerando que o carregamento das caixas nos veículos seja feito de forma ortogonal, isto é, as faces das caixas são posicionadas paralelas às faces do veículo, uma caixa pode ser carregada no veículo com seis orientações possíveis: selecionando alguma das três dimensões da caixa como altura define-se a orientação vertical da mesma, e sobram duas possibilidades para sua orientação horizontal. É possível que em alguma situação prática algumas caixas devam ser carregadas respeitando orientações pré-estabelecidas. Normalmente a orientação vertical das caixas é imposta devido às instruções

“Este lado para cima”, enquanto a orientação horizontal é livre e a caixa pode ter sua base rotacionada em 90° . Se ambas as orientações vertical e horizontal da caixa forem pré-estabelecidas, então diz-se que a caixa não pode ser rotacionada.

Empilhamento: Especificamente no caso tridimensional do carregamento, um número máximo de caixas podem ser empilhadas umas sobre as outras. De uma forma geral, a pressão exercida sobre a face superior de uma determinada caixa não deve exceder um limite máximo pré-estabelecido, para que não ocorram alterações na sua forma. Também são encontrados na prática casos em que se tem um número máximo de caixas que podem ser sobrepostas sobre as outras, como nas instruções sobre empilhamento máximo.

Restrições relacionadas à carga: Estas restrições se referem às caixas que são carregadas nos veículos:

Carregamento completo de grupos de itens: Esta é outra restrição que se aplica a problemas nos quais os veículos não são suficientes para carregar todas as caixas, e então caixas contendo componentes que fazem parte de uma mesma entidade funcional devem ser todas carregadas ou todas não carregadas. No caso de serem todas carregadas, tem-se dois cenários possíveis a serem impostos pela restrição: as caixas podem ser carregadas em veículos distintos, ou podem ser forçadas a serem carregadas todas no mesmo veículo. Esta situação pode ocorrer, por exemplo, com peças de um móvel embaladas separadamente, mas que devem ser todas entregues ao cliente.

Alocação: Quando o problema envolver mais de um veículo, pode-se exigir que subconjuntos de caixas sejam carregadas no mesmo veículo (restrições de conectividade), como por exemplo caixas endereçadas a um mesmo cliente. Por outro lado, pode-se exigir que certos grupos de itens não sejam carregados no mesmo veículo (restrições de separação), como no caso de alimentos e produtos de limpeza. Restrições de conectividade são encontradas nos problemas integrados de roteamento e carregamento de veículos (2L-CVRP e 3L-CVRP), pois se cada cliente é visitado por apenas um veículo, então todas as caixas deste cliente devem ser carregadas no veículo que o atende.

Restrições de posicionamento: Estas restrições lidam com a localização de uma caixa, tanto em termos de sua posição absoluta no veículo quanto de sua posição em relação às outras caixas. Nos problemas de roteamento e carregamento integrados, é importante que caixas de um mesmo cliente estejam posicionadas próximas, para facilitar as operações de carregamento e descarregamento do veículo. Além disso,

nestes problemas os grupos de caixas pertencentes a cada cliente devem ser posicionados no veículo considerando a sequência em que os clientes serão atendidos, para evitar que caixas de um cliente atrapalhem o descarregamento das caixas dos clientes atendidos antes dele, caracterizando as restrições de múltiplos destinos.

Restrições relacionadas ao padrão de carregamento: São restrições concernentes ao arranjo das caixas dentro do veículo:

Estabilidade: Para garantir que as caixas não se movam dentro do veículo, as mesmas devem ter suas faces em contato com as faces de outras caixas e/ou com as faces internas do veículo. A estabilidade vertical, também chamada de estabilidade estática, a ser obtida com o veículo parado, assegura que as caixas estejam apoiadas sobre a base do veículo ou sobre outras caixas, isto é, que não se movam devido à força da gravidade. Em situações reais a estabilidade vertical é uma restrição obrigatória, para que não se tenha caixas “voando” dentro do veículo. A estabilidade horizontal, também chamada estabilidade dinâmica, garante que as caixas não se movam significativamente enquanto o veículo se movimenta.

Complexidade: Padrões de carregamento complexos podem demandar maiores esforços de manuseio, devido, por exemplo, às limitações do equipamento usado para o carregamento/d Descarregamento da carga. Ao estabelecer o padrão de carregamento deve-se levar em consideração tais limitações.

Todas estas restrições já foram abordadas na literatura, individualmente ou associadas umas com as outras. Bortfeldt e Wascher (2013) traz uma compilação dos trabalhos publicados até 2011 e elenca quais das restrições descritas são contempladas por cada trabalho.

2.2.3 Problemas de Empacotamento Bidimensionais

Os Problemas de Empacotamento consistem em empacotar itens menores em objetos maiores sem que haja sobreposição dos itens e sem que os itens excedam as dimensões dos objetos. Nos Problemas de Empacotamento Bidimensionais, itens e objetos consistem em elementos de duas dimensões, como retângulos, no caso do problema com formas regulares. Revisões sobre estes problemas são encontradas em Lodi, Martello e Monaci (2002) e Lodi, Martello e Vigo (2002).

Dado um conjunto $V = \{1, \dots, v\}$ de v objetos retangulares, com dimensões $L_k \times W_k$ onde L_k e W_k denotam, respectivamente, o comprimento e a largura do objeto $k \in V$, e um conjunto $I = \{1, \dots, B\}$ de B itens retangulares com dimensões $l_p \times w_p$ onde l_p

e w_p denotam, respectivamente, o comprimento e a largura do item $p \in I$, um Problema de Empacotamento Bidimensional consiste em determinar uma maneira de carregar os itens de I nos objetos de V de modo que: (i) os itens não se sobreponham e (ii) as dimensões dos itens não ultrapassem os limites geométricos do objeto. A função objetivo é determinada pelo tipo de problema a ser resolvido, podendo corresponder, por exemplo, à maximização da área ocupada dos objetos, à minimização do número de objetos necessários ou de seu custo. A FIGURA 6 mostra a solução para um problema no qual se deve empacotar 9 itens em 1 objeto. A parte (a) mostra o objeto, a parte (b) mostra os itens, e a parte (c) ilustra uma solução para o empacotamento dos itens no objeto.

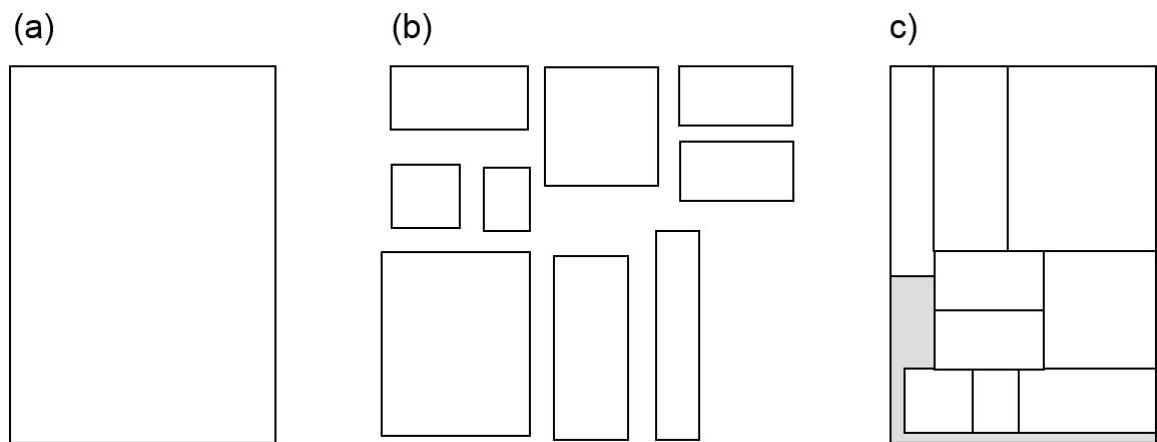


FIGURA 6 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL

Fonte – A autora (2016)

Se no Problema de Carregamento de Contêineres as caixas não puderem ser empilhadas, então o CLP se torna um problema bidimensional, pois serão relevantes apenas as dimensões da base das caixas e da região de carregamento do veículo.

2.2.4 Estudos sobre os Problemas de Empacotamento Bidimensionais

Os Problemas de Corte e Empacotamento Bidimensionais foram introduzidos na literatura por Gilmore e Gomory (1965). Os autores propuseram um modelo no qual se pressupõe conhecer *a priori* os subconjuntos de itens que podem ser empacotados nos objetos e constituir um padrão de empacotamento. Devido ao grande número de possíveis padrões de empacotamento, foi proposto um método de geração de colunas para o modelo, baseado em programação dinâmica. Beasley (1985) formulou um modelo de Programação Linear Inteira baseado na representação discreta do espaço geométrico para carregamento e do uso de coordenadas nas quais os itens podem ser empacotados no objeto. Os modelos de Chen, Lee e Shen (1995) e Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) para o carregamento de contêineres também podem ser adaptados para o caso bidimensional

dos Problemas de Empacotamento.

Devido à complexidade dos padrões de empacotamento possíveis de serem obtidos no caso geral do problema, muitos autores restringiram o problema ao caso em que os itens devem ser empacotados em níveis, ou faixas (LODI; MARTELLO; VIGO, 2002). Esta restrição adicional faz com que as soluções obtidas possam ser piores do que as soluções do caso geral, mas possibilitam que o problema seja resolvido de forma mais simples e rápida, e por isso a maioria dos algoritmos aproximados para Problemas de Empacotamento Bidimensionais utilizam esta abordagem.

Para construir os níveis mencionados, os itens são empacotados da esquerda para a direita, formando faixas. Três abordagens clássicas se enquadram neste tipo de método. Em todas elas os itens são listados em ordem decrescente de sua altura, e empacotados nesta sequência de acordo com uma das três estratégias descritas:

(a) *Next Fit Decreasing Height* (HFDH)

A heurística *Next Fit* é o procedimento mais básico de encaixe de itens. Nela, os itens são colocados em uma lista. O primeiro item é posicionado no canto inferior esquerdo do objeto, e os próximos itens são inseridos através de um processo iterativo, ao lado direito do último objeto alocado, até que a largura restante do objeto se torne insuficiente para acomodar o próximo item. Quando isto ocorre, cria-se uma faixa, da altura do maior item presente nela, e cria-se um novo nível acima do existente, onde se passa a alocar os itens remanescentes na lista, justificando-os à esquerda.

(b) *First Fit Decreasing Height* (FFDH)

Neste algoritmo, procura-se alocar o item da lista no primeiro nível que o acomode. Um novo nível somente será criado se nenhum dos existentes comportar o item a ser carregado.

(c) *Best Fit Decreasing Height* (BFDH)

Na heurística BFDH, o item é alocado no nível existente que apresente o melhor cenário de encaixe para sua inserção. A qualidade de um possível encaixe pode ser avaliada pelo resíduo horizontal da faixa ou pela relação entre a área não ocupada da faixa e a área do item, traduzindo qual faixa apresenta melhor benefício pela recepção do item em relação às demais. Como nos outros métodos, um novo nível é criado quando o item não pode ser alocado em nenhum dos níveis já existentes.

A FIGURA 7 ilustra o funcionamento das três estratégias mencionadas.

Estas estratégias são por si só um método de solução para os Problemas de Empacotamento Bidimensionais de Dimensão Aberta, nos quais não há limites para a criação de novos níveis. Para problemas com dimensões fixas, cada uma das estratégias

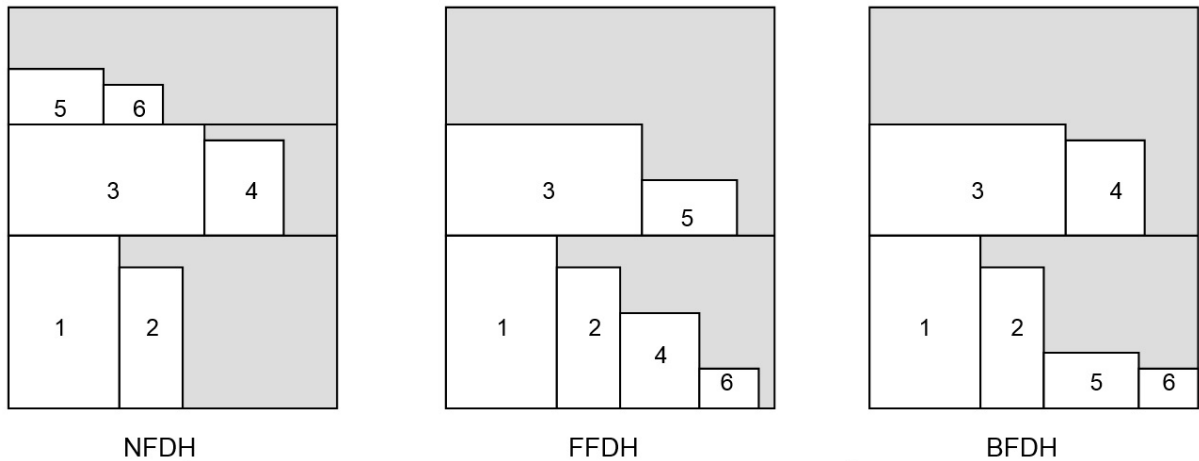


FIGURA 7 – ESTRATÉGIAS PARA O EMPACOTAMENTO EM NÍVEIS

Fonte – (LODI; MARTELLO; VIGO, 2002)

de construção dos níveis dá origem a um método em duas fases para resolução do problema. Na primeira fase a respectiva estratégia considerada é utilizada para alocar os itens nos níveis; enquanto na fase subsequente a mesma estratégia é usada para empacotar os níveis nos objetos disponíveis.

Se for utilizada a estratégia FFDH tem-se o método *Híbrid First-Fit* (HFF) (CHUNG; GAREY; JOHNSON, 1982), e se for utilizada a estratégia BFDH tem-se o método que Berkey e Wang (1987) chamaram de *Finite Best-Strip* (FBS). O método *Hybrid Next-Fit* (HNF) que utiliza a estratégia NFDH nas duas fases é, na verdade, um método de uma fase que empacota o item no nível atual do objeto atual se isto for possível, caso contrário inicia-se um novo item no objeto atual ou em um novo objeto.

Berkey e Wang (1987) desenvolveram também métodos em uma única fase. O *Finite First-Fit* (FFF) empacota o item no primeiro nível do primeiro objeto que o acomodar, caso contrário um novo nível é criado no objeto atual ou em um novo objeto. Já o *Finite Bottom-Left* (FBL) não empacota os itens em níveis, mas se baseia na heurística *Bottom-Left* (BL) para problemas de dimensão aberta, na qual os itens são empacotados na posição mais abaixo possível, alinhados à esquerda.

2.3 PROBLEMAS INTEGRADOS DE ROTEAMENTO E CARREGAMENTO DE VEÍCULOS

O Problema de Roteamento de Veículos é o problema encontrado com mais frequência na logística de transportes. Em sua forma clássica, o CVRP considera restrições unidimensionais de capacidade dos veículos. Entretanto, no transporte de mercadorias, que geralmente são embaladas em caixas, se forem consideradas apenas restrições unidimensionais de capacidade, como peso ou volume das caixas, pode acontecer de não

ser possível acomodá-las nos veículos devido às suas características geométricas.

Este fato levou à inclusão de restrições de carregamento dos veículos ao CVRP. O carregamento de um veículo consiste basicamente em um Problema de Empacotamento das caixas nos veículos, de acordo com as especificidades do problema. Desse modo, tem-se a conjuntura de um problema integrado de roteamento e carregamento de veículos. Este tipo de problema tem sido cada vez mais estudado devido à sua relevância nos sistemas logísticos de distribuição. Revisões sobre os problemas de roteamento com restrições de carregamento são encontradas em Wang, Tao e Shi (2009), Iori e Martello (2010) e Pollaris *et al.* (2015).

Uma das abordagens integradas para problemas de roteamento e carregamento de veículos corresponde ao Problema de Roteamento de Veículos com Restrições Tridimensionais de Carregamento (3L-CVRP *Capacitated Vehicle Routing Problem with Three-Dimensional Loading Constraints*), proposto por Gendreau *et al.* (2006). Acrescentando restrições tridimensionais de carregamento ao CVRP, as rotas serão consideradas factíveis se as caixas dos clientes atendidos nas mesmas puderem ser empacotadas nos respectivos veículos, satisfazendo as restrições do problema de carregamento. A partir deste estudo inicial, surgiram variações para o problema obtidas pela inclusão das restrições para o Problema do Carregamento de Contêineres descritas na seção 2.2.2.

2.3.1 Problemas de Roteamento de Veículos com Restrições de Carregamento Bidimensional

No Problema de Roteamento de Veículos Capacitado a demanda de cada cliente é uma medida unidimensional, geralmente relacionada ao peso ou volume demandado por ele. O mesmo pode ser dito a respeito da capacidade dos veículos.

No entanto, este cenário não é realista quando se fala do transporte de mercadorias embaladas em caixas. Em casos particulares, nos quais as caixas não podem ser carregadas umas sobre as outras, as restrições de carregamento tomam o aspecto bidimensional e tem-se o Problema de Roteamento de Veículos com Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-CVRP *Capacitated Vehicle Routing Problem with Two-Dimensional Loading Constraints*) (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007).

No 2L-CVRP, as características dos veículos e da demanda dos clientes são modificadas para contemplar o aspecto geométrico das mesmas. A capacidade dos veículos é mantida, mas além dela são especificadas as dimensões da superfície de carregamento dos mesmos. Analogamente, cada cliente possui uma demanda distribuída em um conjunto de caixas cujas dimensões da base são conhecidas.

O objetivo do problema continua o mesmo do CVRP: determinar um conjunto de rotas de custo mínimo. As condições (i), (ii) e (iii) impostas ao CVRP (Seção 2.1.1)

também continuam válidas. Porém devem ser acrescentadas as condições relacionadas ao aspecto geométrico do carregamento das caixas nos veículos, que dizem que não pode haver sobreposição das caixas e as mesmas devem ser carregadas dentro das dimensões da superfície de carregamento dos veículos. A FIGURA 8 ilustra um exemplo para o 2L-CVRP.

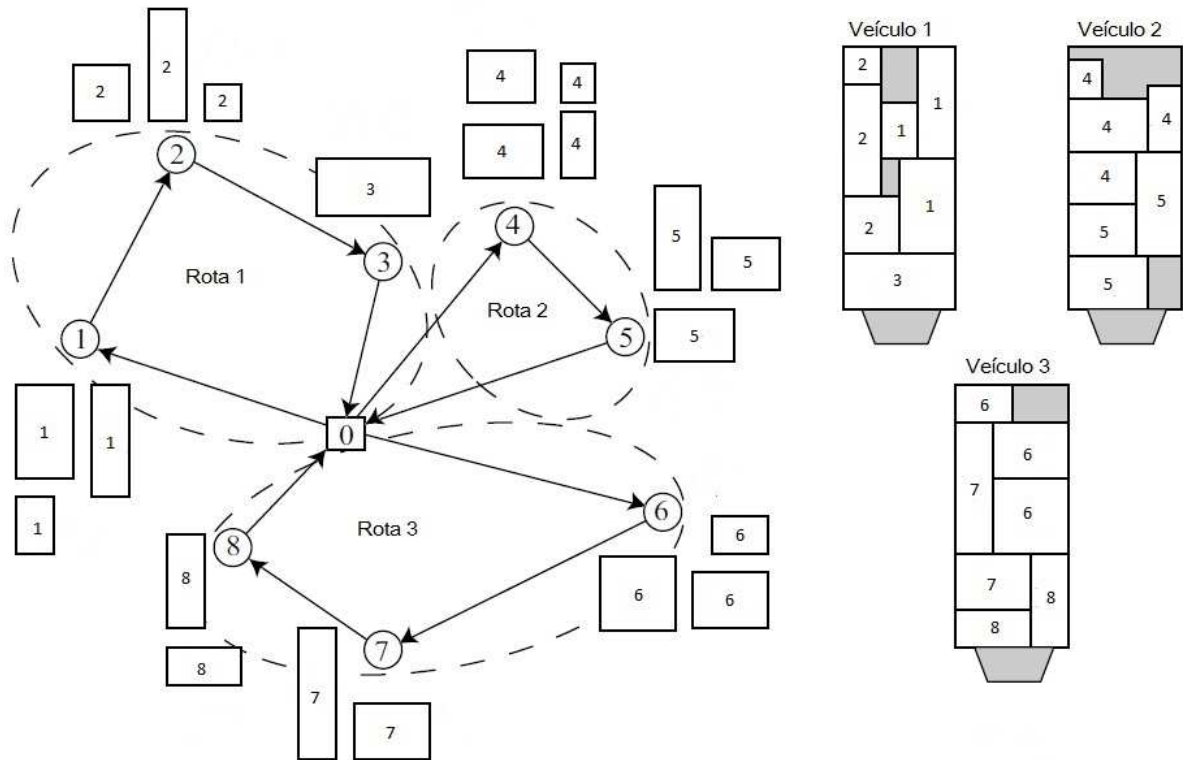


FIGURA 8 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL

Fonte – Adaptado de (GENDREAU *et al.*, 2008)

O problema descrito é conhecido como 2L-CVRP Irrestrito. Uma variação importante é obtida se, no carregamento, for considerada a sequência em que os clientes são atendidos na rota. Esta variação é conhecida como 2L-CVRP Sequencial. Neste problema, as caixas devem ser carregadas nos veículos de modo que quando um cliente é visitado, suas caixas possam ser descarregadas sem a necessidade de movimentação das caixas dos outros clientes. Esta restrição reflete a política LIFO (*Last-In First-Out*) utilizada na logística, que significa que o último item a ser carregado é o primeiro a ser descarregado. Na FIGURA 8 todas as rotas satisfazem as restrições do carregamento sequencial. Observe, agora, a FIGURA 9, que mostra duas rotas: a primeira delas não é factível para o 2L-CVRP Sequencial, enquanto a segunda o é. O carregamento sequencial constitui uma importante restrição prática para o 2L-CVRP, pois as operações de descarregamento se tornam mais simples e consequentemente o atendimento aos clientes é mais rápido.

Iori, Salazar-González e Vigo (2007) resolveram o 2L-CVRP com um algoritmo *Branch-and-Cut*. Para problemas grandes, somente métodos heurísticos atingem bons re-

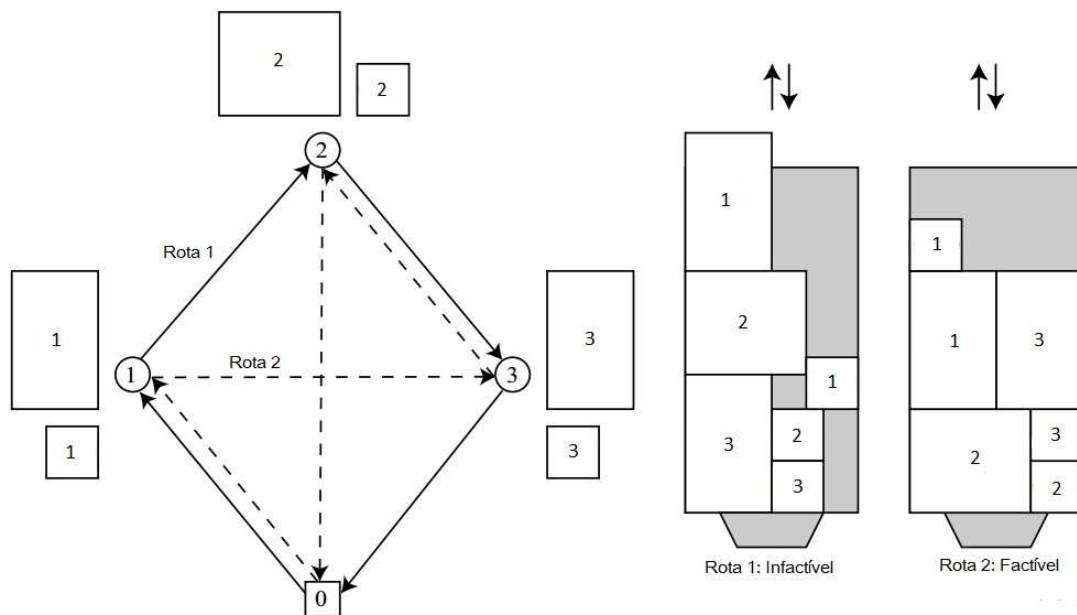


FIGURA 9 – CARREGAMENTO SEQUENCIAL PARA O 2L-CVRP

Fonte – Adaptado de (IORI, 2004)

sultados em tempo computacional aceitável. Diversas meta-heurísticas foram desenvolvidas a partir das abordagens para solução do CVRP clássico, para os quais tais métodos apresentaram muito bons resultados, especialmente a Busca Tabu. Em geral, os algoritmos para o 2L-CVRP resolvem o problema em duas esferas. Um problema principal correspondente ao roteamento é resolvido, evocando outro procedimento para a determinação do carregamento dos veículos.

Gendreau *et al.* (2008) propuseram uma meta-heurística Busca Tabu para o problema do roteamento, associada a dois métodos heurísticos para o problema do carregamento, um para o problema irrestrito e outro para o problema sequencial. Para gerar a solução inicial é proposto um algoritmo que inclui as restrições acerca do carregamento no algoritmo de *savings*, permitindo que duas rotas sejam combinadas se o carregamento da rota resultante for factível. Se esta metodologia não puder gerar rotas factíveis para todos os veículos, o método realiza mais iterações desconsiderando as restrições do carregamento. A partir da solução inicial é executada a Busca Tabu que examina a vizinhança trocando um cliente de rota, as soluções vizinhas são avaliadas quanto à factibilidade do carregamento e aquela que apresentar menor custo é então tomada como solução atual. A Busca Tabu admite soluções com carregamento infactível, porém as mesmas são penalizadas de acordo com um parâmetro pré-estabelecido.

Uma meta-heurística baseada em Colônia de Formigas foi proposta por Fuellerer *et al.* (2009). O roteamento é resolvido por um algoritmo Colônia de Formigas baseado em *savings* enquanto o carregamento é verificado através de limites inferiores, heurísticas e *Branch-and-Bound*.

Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) propõem uma meta-heurística base-

ada em Busca Tabu e Busca Local Guiada para o roteamento, e o carregamento é realizado por um conjunto de cinco heurísticas. A Busca Local Guiada controla a função objetivo do problema penalizando características ruins das soluções. Os autores implementaram ainda uma estrutura de memória para armazenar informações sobre a factibilidade dos carregamentos e evitar a execução repetida das heurísticas.

Duhamel *et al.* (2011) resolveram o problema de roteamento com uma meta-heurística de Busca Local Evolucionária, e as restrições do carregamento são transformadas em restrições do Problema de Programação de Projetos com Recursos Limitados (RCPSP).

Leung *et al.* (2011) apresentam uma Busca Tabu Guiada Estendida e uma nova heurística de empacotamento para o 2L-CVRP. O carregamento é realizado utilizando os espaços disponíveis para o empacotamento do item que melhor se encaixe neles.

Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2013) utilizam um algoritmo meta-heurístico compacto de Busca Local para encontrar uma solução para o problema de roteamento. Para o carregamento é empregada uma heurística de empacotamento bidimensional que busca padrões de empacotamento factíveis. Os autores defendem que a vantagem da metodologia consiste no fato de que somente dois parâmetros interferem no desempenho do algoritmo. Além disso foram implementadas estruturas que eliminam a investigação de padrões de carregamento redundantes ou não promissores.

Dominguez, Juan e Faulin (2014) propõem um algoritmo de múltiplos inícios para evitar os ótimos locais. A cada início é feita uma geração aleatória tendenciosa baseada em *savings* e combinada com heurísticas clássicas de empacotamento para gerar soluções para o 2L-CVRP. Esta abordagem, diferentemente das que foram descritas até agora, integra a questão do empacotamento ao processo de obtenção das rotas.

Wei *et al.* (2015) propuseram uma busca em vizinhança variável para resolver o problema de roteamento, e utilizaram uma meta-heurística *skyline* para examinar as restrições de carregamento. Estruturas de dados foram utilizadas para armazenar informação sobre a factibilidade dos carregamentos, com o intuito de acelerar a execução do algoritmo.

2.3.2 O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional

A seção 2.3.1 descreveu o 2L-CVRP, problema que integra restrições de carregamento bidimensional ao problema clássico de roteamento de veículos. Uma generalização para o 2L-CVRP é obtida se for considerado o problema com frota heterogênea. Neste cenário, encontra-se o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional (2L-HFVRP - *Two Dimensional Loading He-*

terogeneous Fleet Vehicle Routing Problem), descrito a seguir.

O objetivo do 2L-HFVRP é encontrar um conjunto de rotas factíveis de mínimo custo. São aplicadas ao problema restrições relacionadas ao roteamento (R) e restrições relacionadas ao carregamento (C):

- R1 Cada rota inicia e termina no depósito;
- R2 Cada cliente é atendido exatamente por um único veículo;
- R3 A soma das demandas dos clientes atendidos por uma rota não excede a capacidade do veículo associado a ela;
- C1 Os itens demandados por um cliente devem ser todos carregados no veículo que o atende;
- C2 Os itens devem ser carregados com seus lados paralelos aos lados da superfície de carregamento;
- C3 Os itens não se sobrepõem e não excedem as dimensões do veículo em que foram carregados.

2.3.3 Estudos sobre o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições de Carregamento Bidimensional

O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições Bidimensionais de Carregamento foi abordado pela primeira vez por Leung *et al.* (2013). Os autores resolvem o 2L-HFVRP considerando um número ilimitado de veículos de cada tipo, o que corresponde ao 2L-FSMVRP, e consideraram tanto o caso irrestrito como caso sequencial. Eles propuseram um algoritmo que combina Simulated Annealing e Busca Local para o problema de roteamento, e utiliza seis métodos heurísticos para o problema do carregamento.

O *Simulated Annealing* é um método de otimização estocástico, que iterativamente obtém soluções melhores a partir de uma solução inicial. Cada iteração do algoritmo gera um candidato a solução por meio de uma função de vizinhança. Para evitar que o algoritmo convirja para um ótimo local, os autores utilizam a Busca Local para melhorar as soluções. O método apresentado por Leung *et al.* (2013) é descrito em detalhes a seguir.

Uma solução inicial é gerada com base nas demandas dos clientes. Primeiramente, os clientes são ordenados pelo valor decrescente de suas demandas. Nesta ordem, são designados a algum veículo, sendo o veículo escolhido o que irá apresentar menor capacidade não utilizada, proporcionalmente ao seu custo fixo. A cada inserção de um cliente em uma

rota, é verificada a factibilidade do carregamento. Se o mesmo não for factível o algoritmo tenta inserir o cliente em outra rota, isto é, designá-lo a outro veículo. A partir da solução inicial, o método seleciona aleatoriamente um dentre três movimentos possíveis para exploração da vizinhança: o primeiro troca a posição de um cliente dentro de uma rota ou o troca de rota; o segundo permuta a posição de dois clientes numa mesma rota, ou em duas rotas distintas desde que seus veículos tenham a mesma capacidade; e o terceiro é uma variação do método 2-opt que seleciona dois clientes e, se estiverem na mesma rota, inverte a posição deles e dos clientes entre eles ou, se estiverem em rotas diferentes porém de veículos de mesmo tipo, a parte da rota que vai deles até o último cliente de cada rota é permutada. Se a solução obtida pelo movimento selecionado for melhor que a solução atual, esta é tomada como solução atual. Para cada nova solução obtida, é necessário determinar se existe um carregamento factível dos itens dos clientes no veículo. Primeiramente, verifica-se o carregamento em seu aspecto unidimensional, investigando se a soma dos pesos das demandas dos clientes ultrapassa o peso máximo suportado pelo veículo, caso isto não ocorra, os métodos heurísticos são aplicados para resolver o problema de empacotamento bidimensional associado ao carregamento. As cinco primeiras heurísticas utilizadas são propostas por Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009) e a última delas é apresentada em Leung *et al.* (2011).

Para testar o algoritmo proposto, os autores geraram um conjunto de instâncias baseado nas instâncias para o 2L-CVRP (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007). Para cada problema, o limite do número de veículos foi eliminado, e foram acrescentadas informações de capacidade, superfície de carregamento, custo fixo e custo variável de quatro tipos de veículos. Para comprovar a eficiência do método proposto, foram realizados testes com o algoritmo *Simulated Annealing* isolado e combinado com Busca Local, tanto para o problema irrestrito quanto para o sequencial. Foi verificado que a Busca Local aumenta a eficiência do *Simulated Annealing* para todos os problemas considerados, obtendo uma melhoria média de 25,86% nas soluções do problema irrestrito, e de 27,46% para o problema com carregamento sequencial. Observou-se ainda que o tempo computacional também foi reduzido devido à inclusão da etapa de Busca Local no algoritmo.

Dominguez *et al.* (2014) também abordaram o 2L-FSMVRP, porém consideraram apenas o caso irrestrito, mas levando em conta a possibilidade de rotação dos itens. Os autores propuseram um algoritmo multi-início baseado em randomização tendenciosa para heurísticas de roteamento e empacotamento, que integra o processo de empacotamento ao processo de construção das rotas. O método foi testado sobre as instâncias propostas por Leung *et al.* (2013), apenas para o caso irrestrito, em dois cenários: orientado – quando não há possibilidade de rotação dos itens, e não-orientado – quando há a possibilidade de rotação dos itens, e os resultados obtidos para o problema irrestrito orientado foram melhores que os de Leung *et al.* (2013).

Para resolução do Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea

Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional, objeto deste estudo, não foi encontrada nenhuma abordagem em toda a literatura que foi revisada até então. Por este motivo, propõe-se, no próximo capítulo, uma formulação matemática para tal problema.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O 2L-HFFVRP

Neste capítulo, descreve-se com detalhes o Problema Integrado de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional, foco deste trabalho. Uma formulação matemática para o 2L-HFFVRP é proposta, que integra uma formulação para o HFFVRP, restrições para o carregamento bidimensional adaptadas de um modelo matemático para carregamento de contêineres, e restrições para o carregamento sequencial que foram desenvolvidas completamente neste estudo. Por fim, apresenta-se os resultados dos experimentos para validação do modelo proposto. Para escrever as restrições de carregamento, será necessário saber exatamente qual veículo está designado para cada roteiro. Assim, supõe-se que no depósito está disponível um conjunto de veículos, e não de tipos de veículos. É possível que se tenha mais de um veículo com as mesmas características, mas cada um deles será considerado um veículo distinto.

3.1 DESCRIÇÃO FORMAL DO PROBLEMA

O 2L-HFVRP é definido sobre um grafo $G = (N, A)$, em que $N = \{0, 1, \dots, n\}$ define um conjunto de $n + 1$ vértices no qual o vértice 0 corresponde ao depósito e os clientes correspondem aos vértices $1, \dots, n$; e A define o conjunto dos arcos (i, j) que ligam o vértice i ao vértice j . Seja d_{ij} a distância para ir diretamente do vértice i para o vértice j , tal que $(i, j) \in A$.

Cada cliente $i \in N \setminus \{0\}$ demanda um conjunto de m_i itens retangulares, representado por IT_i , cujo peso total é igual a D_i . Cada item $I_{ir} \in IT_i$ ($r = 1, 2, \dots, m_i$) tem comprimento l_{ir} e largura w_{ir} .

Um conjunto $V = \{1, \dots, v\}$ de v veículos está disponível no depósito para realizar o carregamento. Cada veículo $k \in V$ tem uma capacidade de peso Q_k , e uma superfície para carregamento de dimensões $L_k \times W_k$, em que apenas um lado da mesma está acessível para as operações de carregamento e descarregamento. A cada veículo estão associados ainda um custo fixo F_k , se o veículo for utilizado, e um custo variável V_k , proporcional à distância da rota à qual ele for designado.

Dentre as restrições que podem ser aplicadas ao problema serão consideradas as seguintes:

Orientação fixa: As caixas não podem ser rotacionadas.

Unicidade no atendimento aos clientes: Todos os pedidos devem ser entregues aos clientes em uma única visita, não sendo permitido entregas fracionadas.

Carregamento sequencial: A sequência do descarregamento deve ser respeitada, de

modo que a retirada de uma caixa pela porta do veículo não implique no movimento de nenhuma outra caixa.

Todas estas restrições podem ser facilmente relaxadas no modelo que será descrito. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os dados referentes ao problema mencionado acima tratam-se de números inteiros positivos.

O objetivo do 2L-HFFVRP consiste em planejar um conjunto de roteiros de custo mínimo para os veículos disponíveis no depósito, de modo que o depósito seja o local de início e término de cada roteiro, cada cliente seja visitado uma única vez por um único veículo, a demanda de cada cliente seja atendida e a capacidade dos veículos não seja excedida. É importante observar que não necessariamente todos os veículos precisam ser utilizados.

O problema será modelado em etapas: primeiramente, será descrito um modelo para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa. Depois apresentaremos um modelo para o Problema do *Bin Packing* Bidimensional. Então, os dois modelos serão integrados para compor um modelo para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea e Restrições Bidimensionais de Carregamento.

3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA FIXA

Existem várias formas de modelar matematicamente o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea (GOLDEN *et al.*, 1984), (BALDACCI; MINGOZZI, 2009). Neste trabalho, será utilizada uma extensão da formulação dependente do tempo para o Problema do Caixeiro Viajante proposta por Junqueira (2013) para problemas integrados de roteamento de carregamento de veículos, visto que esta formulação possibilita a informação sobre a posição dos clientes em cada roteiro, e isto é necessário para garantirmos o atendimento da restrição de carregamento sequencial.

O veículo chega em cada vértice do grafo em uma posição t . Assume-se que cada roteiro inicia no vértice 0 na posição $t = 0$, e termina no vértice 0 na posição $n + 1$, na hipótese de que apenas um veículo seja utilizado. Pode-se então dizer que o conjunto dos valores possíveis para t é $T = \{1, \dots, n + 1\}$. A FIGURA 10 ilustra um roteiro $R = \{0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0\}$ para um veículo que visita todos os n clientes.

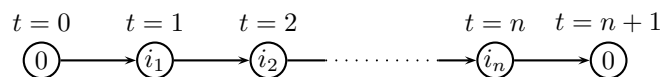


FIGURA 10 – VALORES POSSÍVEIS PARA O ÍNDICE t

Fonte – A autora (2016)

As variáveis de decisão para o modelo do problema de roteamento, z_{ij}^{kt} , são definidas como:

z_{ij}^{kt} : variável binária, igual a 1 se o veículo k vai diretamente do vértice i para o vértice j na posição t , tal que $i, j \in N$, $k \in V$, $t \in T$; e igual a 0 caso contrário.

A formulação matemática para o HFFVRP pode ser escrita como:

$$\text{Minimize } \sum_{k \in V} \sum_{j \in N \setminus \{0\}} F_k \cdot z_{0j}^{k1} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} V_k \cdot d_{ij} \cdot z_{ij}^{kt} \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt} = 1 \quad i \in N \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} t \cdot z_{ij}^{kt} - \sum_{g \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} t \cdot z_{gi}^{kt} = 1, \quad i \in N \setminus \{0\} \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} z_{0j}^{k1} \leq 1, \quad k \in V \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in N} z_{ij}^{k,t+1} - \sum_{g \in N} z_{gi}^{kt} = 0, \quad i \in N \setminus \{0\}, k \in V, t \in T \setminus \{n+1\} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} D_i \cdot z_{ij}^{kt} \leq Q_k, \quad k \in V \quad (3.6)$$

$$z_{ij}^{kt} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N, k \in V, t \in T \quad (3.7)$$

Na formulação (3.1)-(3.7), a função objetivo (3.1) minimiza o custo dos roteiros utilizados para visitar os clientes. As restrições (3.2) garantem que cada cliente é visitado somente uma vez, enquanto as restrições (3.3) garantem a conectividade de cada roteiro, isto é, garantem que se um cliente i é visitado na posição t , este cliente tem que ser o ponto de partida para algum outro cliente em uma posição $t + 1$. As restrições (3.4) asseguram que cada veículo é utilizado no máximo uma vez. As restrições (3.5) garantem a conservação de fluxo de cada roteiro, isto é, garantem que se um veículo k chega em um cliente i na posição t , então i deve ser ponto de partida para que o veículo k visite algum outro cliente na posição $t + 1$ e as restrições (3.6) garantem que a capacidade dos veículos não é excedida. Por fim, as restrições (3.7) definem o domínio das variáveis de decisão.

3.3 RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL

Antes de formular as restrições bidimensionais de carregamento para o problema, é necessário criar um conjunto de todos os itens que serão carregados nos veículos. Seja

este conjunto representado por I . Os m_1 primeiros elementos de I são os itens do cliente 1, os próximos elementos de I são os itens do cliente 2, e assim é feito até que os últimos itens de I sejam os itens do cliente n . Assim, cada item I_{ir} equivale a um item I_p , $p = \sum_{j=1}^{i-1} m_j + r$, e portanto cada cliente demanda um conjunto de itens $I_p \in IT_i \left(p = \sum_{j=1}^{i-1} m_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^i m_j \right)$, enquanto o conjunto de itens a ser carregado nos veículos é $I = \bigcup_{i=1}^n IT_i$. Cada item $I_p \in I$ tem comprimento l_p e largura w_p . O número de elementos do conjunto I é $B = \sum_{i=1}^n m_i$.

A posição dos itens quando carregados nos veículos pode ser determinada por um Problema do *Bin Packing* Bidimensional, definido sobre um conjunto $V = \{1, \dots, v\}$ de v objetos retangulares (no caso as superfícies de carregamento dos veículos), com dimensões $L_k \times W_k$ onde L_k e W_k denotam, respectivamente, comprimento e largura, e um conjunto $I = \{I_1, \dots, I_B\}$ de B itens retangulares (no caso os itens que serão carregados nos veículos) com dimensões $l_p \times w_p$ onde l_p e w_p denotam, respectivamente, o comprimento e a largura do item $I_p \in I$.

Para formular matematicamente o as restrições bidimensionais de carregamento concernentes ao 2L-HFFVRP, tomaremos como base a formulação para o problema de carregamento de contêineres proposto por Chen, Lee e Shen (1995), adaptando-o para o caso bidimensional, e acrescentando restrições que relacionem os problemas de roteamento e carregamento.

Para mapear a superfície de carregamento do veículo, convém tomar um sistema cartesiano bidimensional composto de dois eixos X e Y . Suponha que o canto frontal esquerdo da superfície de carregamento do veículo seja posicionado na origem $(0,0)$ do sistema cartesiano, sua lateral esquerda sobre o eixo X e sua lateral frontal sobre o eixo Y , e considere ainda que a porta do veículo que dá acesso à carga se encontra no lado entre as coordenadas $(L,0)$ e (L,W) (FIGURA 11).

Supondo que as caixas tenham orientação fixa, são definidas as seguintes variáveis: (x_p, y_p) : variáveis reais, que correspondem às coordenadas do canto frontal esquerdo do item I_p quando posicionado no veículo, tal que $I_p \in I$.

s_{pk} : variável binária, igual a 1 se o item I_p é carregado no veículo k , tal que $I_p \in I$, $k \in V$; e igual a 0 caso contrário.

v_k : variável binária, igual a 1 se o veículo k é utilizado, tal que $k \in V$; e igual a 0 caso contrário.

α_{pq} : variável binária, igual a 1 se o item I_p é posicionado atrás do item I_q , tal que $I_p, I_q \in I$, $p < q$; e igual a 0 caso contrário.

β_{pq} : variável binária, igual a 1 se o item I_p é posicionado à frente do item I_q , tal que $I_p, I_q \in I$, $p < q$; e igual a 0 caso contrário.

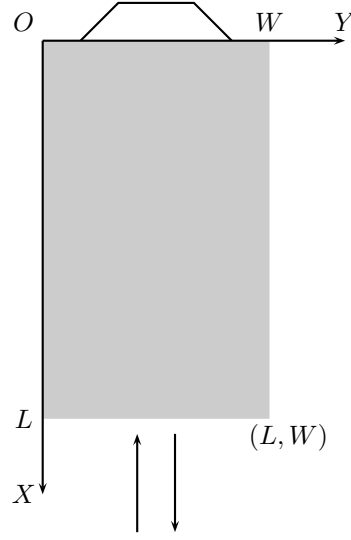


FIGURA 11 – SUPERFÍCIE DE CARREGAMENTO DO VEÍCULO

Fonte – A autora(2016)

γ_{pq} : variável binária, igual a 1 se o item I_p é posicionado à esquerda do item I_q , tal que $I_p, I_q \in I$, $p < q$; e igual a 0 caso contrário.

δ_{pq} : variável binária, igual a 1 se o item I_p é posicionado à direita da item I_q , tal que $I_p, I_q \in I$, $p < q$; e igual a 0 caso contrário.

As variáveis $\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}, \delta_{pq}$ ditam o posicionamento relativo entre os itens. Para facilitar a compreensão do comportamento destas variáveis, um exemplo é dado na FIGURA 12, que mostra dois itens I_p e I_q carregados em um veículo. Supondo $p < q$, para estes itens temos: $\alpha_{pq} = 1$, $\beta_{pq} = 0$, $\gamma_{pq} = 0$ e $\delta_{pq} = 0$.

É importante observar que um item I_p é dito estar atrás ou a frente do item I_q somente se não houver interseção das projeções destes dois itens sobre o eixo X . Analogamente, I_p só pode estar à esquerda ou direita de I_q se não houver interseção de suas projeções sobre o eixo Y .

Assim, podemos ter $\alpha_{pq} + \beta_{pq} \leq 1$ e $\gamma_{pq} + \delta_{pq} \leq 1$, enquanto $1 \leq \alpha_{pq} + \beta_{pq} + \gamma_{pq} + \delta_{pq} \leq 2$.

Sendo M um número arbitrariamente grande, as restrições bidimensionais de carregamento podem ser escritas como:

$$x_p + l_p \leq x_q + (1 - \alpha_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.8)$$

$$x_q + l_q \leq x_p + (1 - \beta_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.9)$$

$$y_p + w_p \leq y_q + (1 - \gamma_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.10)$$

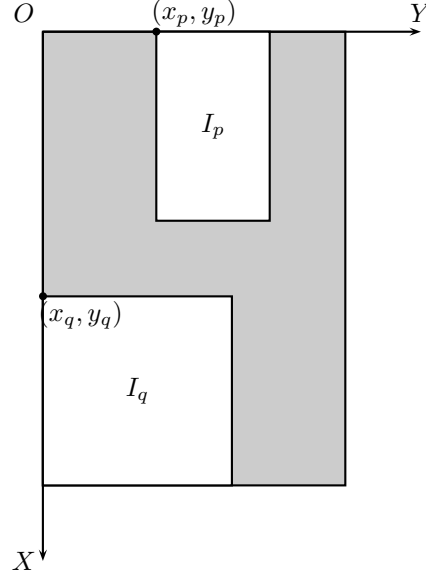


FIGURA 12 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE OS ITENS
Fonte – A autora(2016)

$$y_q + w_q \leq y_p + (1 - \delta_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.11)$$

$$\alpha_{pq} + \beta_{pq} + \gamma_{pq} + \delta_{pq} \geq s_{pk} + s_{qk} - 1, \quad I_p, I_q \in I, p < q, k \in V \quad (3.12)$$

$$x_p + l_p \leq L_k + (1 - s_{pk})M, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.13)$$

$$y_p + w_p \leq W_k + (1 - s_{pk})M, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.14)$$

$$x_p, y_p \in \mathbb{R}, \quad I_p \in I \quad (3.15)$$

$$\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}, \delta_{pq} \in \{0, 1\}, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.16)$$

$$s_{pk} \in \{0, 1\}, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.17)$$

As restrições (3.8)-(3.11) garantem que não haja sobreposição dos itens, e a restrição (3.12) faz com que a verificação de sobreposição seja feita apenas para itens carregados no mesmo veículo, enquanto as restrições (3.13)-(3.14) fazem com que os itens não excedam as dimensões da superfície de carregamento do veículo. Por fim, as restrições (3.15)-(3.17) definem o domínio das variáveis de decisão.

Estas restrições apresentadas estão associadas apenas ao posicionamento dos itens nos veículos, isto é, evitam que haja sobreposição dos itens e que os mesmos excedam as dimensões dos veículos, mas não relacionam o problema de roteamento de veículos com o problema de carregamento dos itens nos veículos.

Uma das restrições do 2L-HFFVRP diz que cada cliente é visitado uma única vez por um único veículo, e portanto todos os itens de um cliente devem ser carregados no veículo que o atende. Para representar matematicamente esta restrição, definir-se-á a variável auxiliar t_{ik} dada por:

t_{ik} : variável binária, igual a 1 se o cliente i é visitado pelo veículo k , tal que $i \in N \setminus \{0\}$, $k \in V$; e igual a 0 caso contrário.

Para que todos os itens de um mesmo cliente sejam carregadas no mesmo veículo, deve-se impor ao modelo a restrição:

$$\sum_{I_p \in IT_i} s_{pk} = m_i \cdot t_{ik}, \quad i \in N \setminus \{0\}, k \in V \quad (3.18)$$

No entanto, sabe-se que $t_{ik} = \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt}$. Logo, (3.18) pode ser reescrita como:

$$\sum_{I_p \in IT_i} s_{pk} = m_i \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt}, \quad i \in N \setminus \{0\}, k \in V \quad (3.19)$$

A formulação composta por (3.1)-(3.7), (3.8)-(3.17) e (3.19) corresponde à formulação matemática para o 2L-HFFVRP irrestrito. Para o caso sequencial, acrescentam-se as restrições apresentadas na próxima seção.

3.4 RESTRIÇÕES PARA O CARREGAMENTO SEQUENCIAL

As restrições apresentadas nesta seção dizem respeito à sequência de atendimento aos clientes em cada roteiro, com o intuito de que itens de um determinado cliente não impeçam o descarregamento de itens de clientes que são atendidos antes dele.

Considerando dois clientes i ao qual deve ser entregue um item I_p , e um cliente j ao qual deve ser entregue um item I_q , é preciso impedir que o item I_q do cliente j obstrua o descarregamento do item I_p do cliente i . As restrições (3.20) verificam se um cliente i é atendido em uma posição t_1 anterior à posição t_2 na qual um cliente j é atendido. Se isto não ocorrer, o item I_p do cliente i e o item I_q do cliente j têm suas coordenadas em relação ao eixo X livres. No entanto, se o cliente i for atendido antes do cliente j , temos duas possibilidades: se o item I_p do cliente i estiver completamente à esquerda ou à direita do item I_q do cliente j , temos $\gamma_{pq} + \delta_{pq} = 1$ e não existe interseção entre as projeções destes itens sobre o eixo Y , assim um não atrapalha o descarregamento do outro; por outro lado,

se o item I_p não estiver completamente à esquerda ou à direita do item I_q , então um estará à frente ou atrás do outro, e as restrições impõem que I_p esteja à frente de I_q . O mesmo raciocínio é válido para o caso em que o cliente i for atendido depois do cliente j , contemplado pelas restrições (3.21).

$$x_q + l_q \leq x_p + \left(2 + (\gamma_{pq} + \delta_{pq}) - \left(\sum_{g \in N} z_{gj}^{kt_2} + \sum_{g \in N} z_{gi}^{kt_1} \right) \right) M, \quad i, j \in N \setminus \{0\}, i < j, \\ I_p \in IT_i, I_q \in IT_j, k \in V, t_1 \in \{1, \dots, n-1\}, t_1, t_2 \in T, t_2 > t_1 \quad (3.20)$$

$$x_p + l_p \leq x_q + \left(2 + (\gamma_{pq} + \delta_{pq}) - \left(\sum_{g \in N} z_{gi}^{kt_2} + \sum_{g \in N} z_{gj}^{kt_1} \right) \right) M, \quad i, j \in N \setminus \{0\}, i < j, \\ I_p \in IT_i, IT_q \in I_j, k \in V, t_1 \in \{1, \dots, n-1\}, t_1, t_2 \in T, t_2 > t_1 \quad (3.21)$$

A forma como foram estabelecidas as restrições para o carregamento sequencial permite que se atinja a otimalidade no aproveitamento da superfície de carregamento do veículo, mesmo trabalhando com itens fortemente heterogêneos, visto que é analisada a posição de um cliente em relação a todos os outros, e não somente aos clientes que o precedem ou sucedem. As restrições (3.20) e (3.21) poderiam ser simplificadas, analisando-se apenas de pares de clientes que são visitados em sequência no roteiro, mas isso permitiria carregamentos não sequenciais.

Supondo-se um problema com 4 clientes, cada um com demanda de um único item, e um único veículo. Considere, por simplicidade, que o roteiro de custo mínimo seja $\{0, 1, 2, 3, 4, 0\}$. A FIGURA 13 mostra dois possíveis carregamentos para o veículo em questão. Se as restrições de carregamento sequencial tivessem sido aplicadas sobre pares de clientes vizinhos no roteiro, teríamos feito as seguintes restrições:

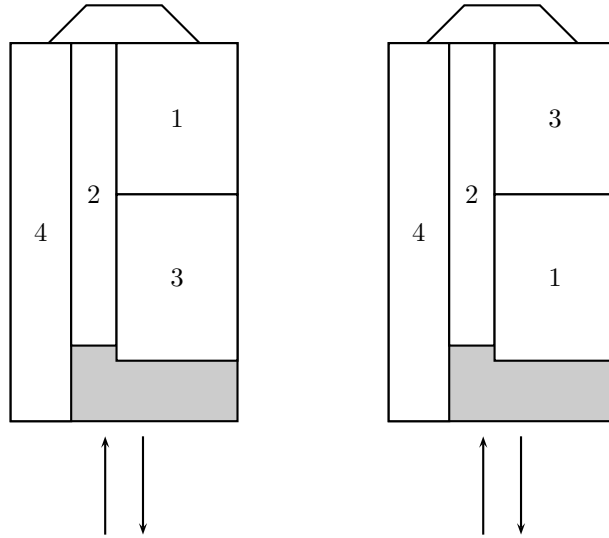


FIGURA 13 – CARREGAMENTO NÃO-SEQUENCIAL E CARREGAMENTO SEQUENCIAL

Fonte – A autora(2016)

- (i) o item do cliente 1 não pode ter seu descarregamento obstruído pelo item do cliente 2;
- (ii) o item do cliente 2 não pode ter seu descarregamento obstruído pelo item do cliente 3;
- (iii) o item do cliente 3 não pode ter seu descarregamento obstruído pelo item do cliente 4.

Estes pressupostos tratariam como factível os dois carregamentos da FIGURA 13, no entanto o primeiro deles não representa um carregamento sequencial.

Por outro lado, analisando todos os pares de clientes, como fazem as restrições (3.20) e (3.21), temos que:

- (i) o item do cliente 1 não pode ter seu descarregamento obstruído pelos itens dos clientes 2, 3 e 4;
- (ii) o item do cliente 2 não pode ter seu descarregamento obstruído pelos clientes 3 e 4;
- (iii) o item do cliente 3 não pode ter seu descarregamento obstruído pelo item do cliente 4.

Estes pressupostos tratariam como factível apenas o segundo carregamento da FIGURA 13.

3.5 FORMULAÇÃO COMPLETA PARA O 2L-HFFVRP

A formulação matemática completa proposta neste estudo para o 2L-HFFVRP sequencial é composta por (3.1)-(3.7), (3.8)-(3.17) e (3.19)-(3.21), apresentada a seguir:

$$\text{Minimize } \sum_{k \in V} \sum_{j \in N \setminus \{0\}} F_k \cdot z_{0j}^{k1} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} V_k \cdot d_{ij} \cdot z_{ij}^{kt} \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt} = 1 \quad i \in N \setminus \{0\} \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} t \cdot z_{ij}^{kt} - \sum_{g \in N} \sum_{k \in V} \sum_{t \in T} t \cdot z_{gi}^{kt} = 1, \quad i \in N \setminus \{0\} \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} z_{0j}^{k1} \leq 1, \quad k \in V \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in N} z_{ij}^{k,t+1} - \sum_{g \in N} z_{gi}^{kt} = 0, \quad i \in N \setminus \{0\}, k \in V, t \in T \setminus \{n+1\} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} D_i \cdot z_{ij}^{kt} \leq Q_k, \quad k \in V \quad (3.6)$$

$$x_p + l_p \leq x_q + (1 - \alpha_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.8)$$

$$x_q + l_q \leq x_p + (1 - \beta_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.9)$$

$$y_p + w_p \leq y_q + (1 - \gamma_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.10)$$

$$y_q + w_q \leq y_p + (1 - \delta_{pq})M, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.11)$$

$$\alpha_{pq} + \beta_{pq} + \gamma_{pq} + \delta_{pq} \geq s_{pk} + s_{qk} - 1, \quad I_p, I_q \in I, p < q, k \in V \quad (3.12)$$

$$x_p + l_p \leq L_k + (1 - s_{pk})M, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.13)$$

$$y_p + w_p \leq W_k + (1 - s_{pk})M, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.14)$$

$$\sum_{I_p \in IT_i} s_{pk} = m_i \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} z_{ij}^{kt}, \quad i \in N \setminus \{0\}, k \in V \quad (3.19)$$

$$x_q + l_q \leq x_p + \left(2 + (\gamma_{pq} + \delta_{pq}) - \left(\sum_{g \in N} z_{gj}^{kt_2} + \sum_{g \in N} z_{gi}^{kt_1} \right) \right) M, \quad i, j \in N \setminus \{0\}, i < j, \\ I_p \in IT_i, I_q \in IT_j, k \in V, t_1 \in \{1, \dots, n-1\}, t_2 \in T, t_2 > t_1 \quad (3.20)$$

$$x_p + l_p \leq x_q + \left(2 + (\gamma_{pq} + \delta_{pq}) - \left(\sum_{g \in N} z_{gi}^{kt_2} + \sum_{g \in N} z_{gj}^{kt_1} \right) \right) M, \quad i, j \in N \setminus \{0\}, i < j, \\ I_p \in IT_i, I_q \in IT_j, k \in V, t_1 \in \{1, \dots, n-1\}, t_2 \in T, t_2 > t_1 \quad (3.21)$$

$$z_{ij}^{kt} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N, k \in V, t \in T \quad (3.7)$$

$$x_p, y_p \in \mathbb{R}, \quad I_p \in I \quad (3.15)$$

$$\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}, \delta_{pq} \in \{0, 1\}, \quad I_p, I_q \in I, p < q \quad (3.16)$$

$$s_{pk} \in \{0, 1\}, \quad I_p \in I, k \in V \quad (3.17)$$

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos utilizando o modelo proposto para alguns exemplos pequenos do 2L-HFVRP.

3.6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O modelo formulado para o 2L-HFFVRP foi utilizado para resolver alguns problemas obtidos a partir da modificação de instâncias da literatura, com o intuito de validá-lo e de analisar a viabilidade de sua aplicação.

Serão descritos os problemas utilizados nos testes, e os resultados obtidos serão apresentados e discutidos.

3.6.1 Descrição dos Problemas Utilizados nos Testes

Os problemas para os testes foram obtidos a partir da instância 1 de Leung *et al.* (2013). Os autores propuseram, para o 2L-HFVRP, instâncias similares às instâncias para o 2L-CVRP (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007). Tratam-se de 36 instâncias, cada uma com 5 problemas associados a 5 classes. A classe 1 corresponde ao problema clássico de roteamento com frota heterogênea (cada cliente demanda apenas um item de dimensões unitárias), e nas demais classes a quantidade de itens e suas dimensões são diferentes.

Como as instâncias de Leung *et al.* (2013) para o 2L-HFVRP são problemas grandes, com o número de clientes variando de 15 a 255, resolver estes problemas por meio do modelo formulado neste trabalho não seria viável devido a limitações computacionais. Por isto, os problemas que foram utilizados no conjunto de testes foram obtidos a partir da instância 1 para o 2L-HFVRP, utilizando apenas um pequeno subconjunto de clientes. Para cada classe, foram selecionados os subconjuntos dos n primeiros clientes, com n variando de 4 a 9. A TABELA 1 contém os dados dos clientes utilizados nos problemas. Para o depósito 0 e para cada cliente i , é dada a sua localização no plano cartesiano; para

cada cliente, são expostos também sua demanda e, para cada classe 2-5, são dadas as dimensões de seus itens.

TABELA 1 – INFORMAÇÕES DOS CLIENTES

Clientes			Classe	Itens	
i	(x_i, y_i)	D_i		m_i	$(l_p, w_p), p \in 1, \dots, m_i$
0	(30,40)				
1	(37,52)	7	2	2	(7, 9); (34, 3)
			3	2	(4, 11); (13, 6)
			4	4	(5, 12); (7, 7); (15, 3); (11, 3)
			5	4	(11, 5); (21, 3); (19, 3); (10, 3)
2	(49,49)	30	2	2	(14, 5); (36, 3)
			3	2	(9, 5); (5, 15)
			4	2	(28, 2); (6, 14)
			5	4	(4, 2); (6, 11); (5, 5); (7, 10)
3	(52,64)	16	2	2	(29, 3); (5, 8)
			3	2	(13, 8); (26, 2)
			4	1	(8, 9)
			5	4	(15, 4); (5, 5); (6, 11); (6, 5)
4	(20,26)	9	2	2	(19, 3); (9, 4)
			3	1	(10, 5)
			4	4	(8, 11); (15, 7); (11, 2); (6, 9)
			5	1	(19, 4)
5	(40,30)	21	2	2	(6, 10); (8, 10)
			3	2	(13, 7); (31, 2)
			4	1	(13, 2)
			5	4	(7, 5); (12, 5); (6, 5); (4, 4)
6	(21,47)	15	2	1	(19, 9)
			3	2	(12, 8); (6, 11)
			4	4	(12, 5); (16, 3); (29, 3); (13, 7)
			5	1	(11, 4)
7	(17,63)	19	2	1	(7, 11)
			3	1	(5, 10)
			4	3	(8, 4); (6, 6); (6, 5)
			5	5	(4, 11); (23, 2); (14, 4); (6, 2); (8, 4)
8	(31,62)	23	2	1	(12, 7)
			3	3	(9, 7); (7, 8); (12, 3)
			4	3	(7, 6); (16, 6); (13, 8)
			5	3	(16, 3); (10, 3); (4, 5)
9	(52,33)	11	2	2	(22, 4); (31, 3)
			3	2	(22, 2); (7, 13)
			4	2	(21, 2); (5, 12)
			5	4	(5, 9); (5, 6); (7, 3); (23, 2)

Fonte – A autora (2016)

Para esta instância, Leung *et al.* (2013) disponibiliza uma frota composta por quatro tipos de veículos, com as seguintes características:

Veículo A: $Q_A = 20$; $L_A = 10$; $W_A = 10$; $F_A = 10$; $V_A = 1, 0$

Veículo B: $Q_B = 25$; $L_B = 15$; $W_B = 15$; $F_B = 20$; $V_B = 1, 1$

Veículo C: $Q_C = 40$; $L_C = 25$; $W_C = 25$; $F_C = 30$; $V_C = 1, 2$

Veículo D: $Q_D = 60$; $L_D = 40$; $W_D = 20$; $F_D = 40$; $V_D = 1, 3$

Para cada problema gerado, determinou-se um número de veículos de cada tipo para compor a frota, de modo que as quantidades e veículos dos tipos D , C , B e A , nesta ordem, fossem minimizadas, isto é, de modo a minimizar a quantidade de veículos com maior custo. Por serem pequenos e terem capacidade muito baixa, suficiente para atender em geral um único cliente, os veículos do tipo A não foram utilizados. Os dados dos problemas gerados para validação do modelo 2L-HFFVRP estão dispostos na TABELA 2, que mostra, para cada problema, o número de clientes, a quantidade de cada tipo de veículo A , B , C e D disponível, o número total de veículos disponíveis e, para cada classe 2-5, o número de itens a serem carregados nos veículos.

TABELA 2 – CARACTERÍSTICAS DOS PROBLEMAS

Problema	n	Veículos					Nº de itens em cada classe			
		A	B	C	D	Total	2	3	4	5
P4	4			1	1	2	8	7	11	13
P5	5			1	1	2	10	9	12	17
P6	6		1	1	1	3	11	11	16	18
P7	7		2	1	1	4	12	12	19	23
P8	8		1	2	1	4	13	15	22	26
P9	9			1	2	3	15	17	24	30

Fonte – A autora (2016)

3.6.2 Resultados Obtidos

O modelo 2L-HFFVRP foi implementado em Visual Basic .Net, e resolvido pelo *solver* CPLEX 12.6, em um microcomputador Core i5 1.40 GHz, com 8Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 8. As configurações padrão do CPLEX não foram alteradas. Os problemas foram resolvidos para ambos os casos Sequencial e Irrestrito do problema. No caso sequencial foi utilizada a formulação completa da Seção 3.5; e para o caso Irrestrito foram excluídas as restrições (3.20) e (3.21). Os resultados obtidos pelos experimentos estão apresentados nas TABELAS 3 e 4, para os casos Sequencial e Irrestrito, respectivamente, que mostram, para cada classe, o valor da função objetivo FO e o tempo $t(s)$ gasto para resolver o problema, em segundos.

TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO PARA O 2L-HFFVRP SEQUENCIAL

Prob.	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5	
	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)
P4	201,54	0,45	201,54	0,44	201,54	0,45	201,54	0,45	201,54	0,73
P5	222,34	0,47	222,34	0,27	259,24	0,48	222,34	0,72	222,34	5,73
P6	267,42	1,05	270,92	0,64	287,13	1,09	303,74	3,59	267,42	9,55
P7	330,94	4,14	349,04	1,47	365,26	3,58	381,87	13,52	336,22	56,51
P8	385,97	13,72	385,97	2,28	401,08	14,03	411,05	33,83	386,26	220,04
P9	394,96	415,12	406,72	302,50	397,47	784,37	394,96	4210,26	394,96	7558,71

Fonte – A autora (2015)

TABELA 4 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO PARA O 2L-HFFVRP IRRESTRITO

Prob.	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5	
	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)	FO	t(s)
P4	201,54	0,25	201,54	0,22	201,54	0,25	201,54	0,44	201,54	0,44
P5	222,34	0,45	222,34	0,23	259,24	0,44	222,34	0,45	222,34	0,48
P6	267,42	0,52	270,92	0,45	287,13	0,47	303,74	1,13	267,42	1,52
P7	330,94	0,91	349,04	0,47	365,26	0,47	381,87	2,02	336,22	3,78
P8	385,97	2,25	385,97	0,50	401,08	1,78	411,05	3,55	386,26	84,62
P9	394,96	6,41	406,72	7,03	397,47	50,16	394,96	91,04	394,96	395,41

Fonte – A autora (2015)

Foram encontradas soluções ótimas para todos os problemas, tanto no caso Irrestrito como no caso Sequencial. Nota-se que, nos dois casos, exceto para o problema P4 (com $n = 4$ clientes), os valores da função objetivo se deterioram da Classe 1 para as demais, isto é, do problema puro de roteamento HFFVRP para o problema com restrições bidimensionais de carregamento 2L-HFFVRP2. Além disso, em geral o tempo computacional gasto para resolver o problema aumenta progressivamente da Classe 2 para a Classe 5, isto é, aumenta quanto maior for o número total de itens, pois isto significa maior complexidade na composição dos carregamentos.

Por outro lado, os valores da função objetivo não diferem nos casos Irrestrito e Sequencial. No entanto, o tempo computacional para resolver o mesmo problema considerando restrições de carregamento sequencial aumenta consideravelmente em relação ao caso irrestrito. Então, o impacto das restrições de carregamento sequencial está mais relacionado à forma como os itens são carregados nos veículos. A Figura 15 ilustra o carregamento dos veículos do problema P9-Classe 5 para o caso Sequencial, e a Figura 14 ilustra o carregamento para o mesmo problema no caso Irrestrito.

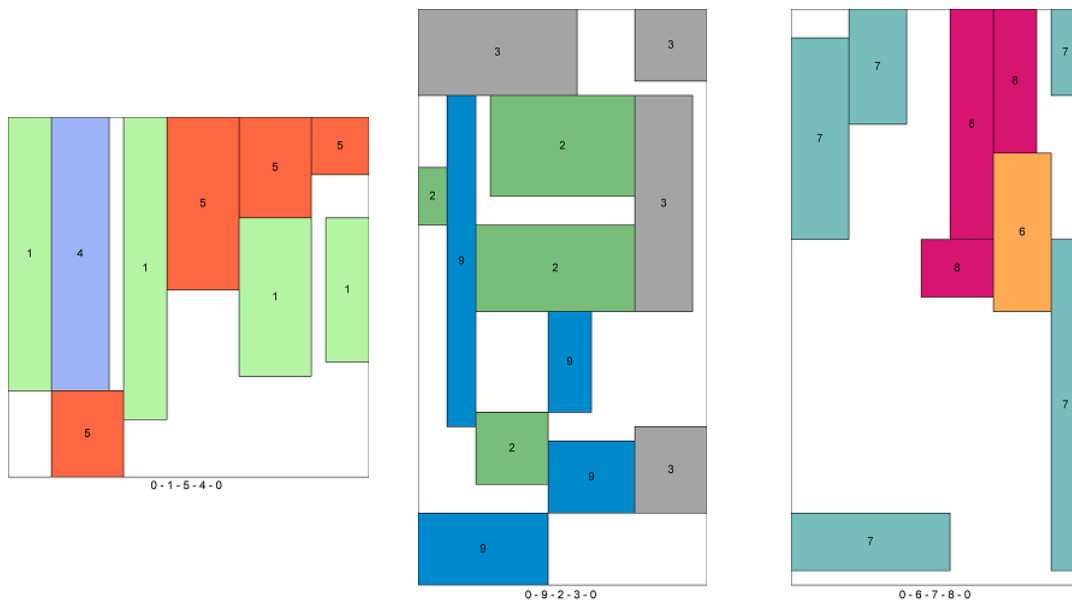


FIGURA 14 – CARREGAMENTO DOS VEÍCULOS PARA O PROBLEMA P9-CLASSE 5 NO CASO SEQUENCIAL

Fonte – A autora (2016)

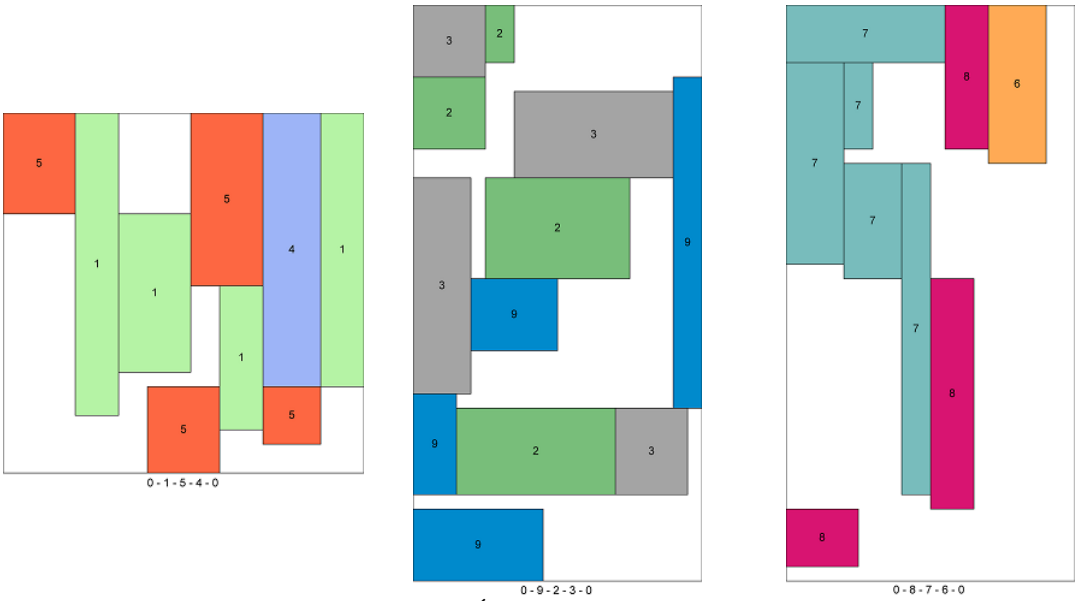


FIGURA 15 – CARREGAMENTO DOS VEÍCULOS PARA O PROBLEMA P9-CLASSE 5 NO CASO IRRESTRITO

Fonte – A autora (2016)

4 ALGORITMO *SIMULATED ANNEALING* PARA O 2L-HFFVRP

O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento é um problema de otimização combinatória altamente complexo. No Capítulo anterior foi formulado um modelo de programação linear inteira mista para este problema, mas os resultados mostraram que o modelo só pode ser resolvido para problemas muito pequenos. Não existe na literatura nenhum método de solução para o 2L-HFFVRP exato nem aproximado.

Nesta seção é apresentado o algoritmo baseado na meta-heurística *Simulated Annealing* desenvolvido para resolver o 2L-HFFVRP, que utiliza métodos heurísticos para a determinação do carregamento dos itens nos veículos. Estas heurísticas são apresentadas, é feita uma breve revisão acerca da meta-heurística *Simulated Annealing*, e o algoritmo proposto é detalhadamente explicado. Por fim, são mostrados os resultados obtidos com os experimentos computacionais realizados com o método proposto, para resolução de problemas da literatura.

4.1 HEURÍSTICAS PARA O CARREGAMENTO BIDIMENSIONAL

Dado um roteiro, é necessário determinar se o mesmo é factível, isto é, se a demanda dos clientes não excede a capacidade do veículo, e se todos os itens demandados pelos clientes deste roteiro podem ser carregados no veículo sem sobreposição. Além disso, no caso sequencial a ordem de carregamento dos itens, relacionada à ordem de atendimento aos clientes, também deve ser respeitada.

Para verificar a factibilidade de um roteiro, primeiramente analisa-se se a capacidade do veículo não é excedida, e depois se a soma das áreas dos itens dos clientes não excedem a área da superfície de carregamento do veículo. Se tais condições forem satisfeitas, é possível que exista um carregamento factível, e então são aplicados métodos heurísticos para determiná-lo.

Foram utilizados neste estudo oito heurísticas $Heur_i$ ($i = 1 \dots, 8$) para determinar o carregamento dos itens nos veículos, que carregam um item de cada vez, na posição mais adequada segundo algum critério. As cinco primeiras heurísticas são baseadas no trabalho de Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009), e as outras três são propostas neste trabalho.

Quando a restrição de carregamento sequencial é considerada, os itens são carregados na ordem inversa à ordem de atendimento aos clientes. Para as seis primeiras heurísticas ($Heur_i$ ($i = 1, \dots, 6$)) podem ser ainda estabelecidas três ordens de carregamento para os itens de um cliente: maior dimensão W , maior dimensão L ou maior área.

As outras duas heurísticas (Heur₇, Heur₈) escolhem, dentre os itens do cliente, qual deles será carregado. Para o caso irrestrito, todos os itens são ordenados de acordo com sua dimensão L , sua dimensão W ou sua área nas heurísticas Heur _{i} ($i = 1, \dots, 6$), enquanto as heurísticas Heur₇ e Heur₈ selecionam, dentre os itens de todos os clientes do roteiro, qual deles será carregado.

Inicialmente, apenas o canto frontal esquerdo da superfície de carregamento do veículo, correspondente ao ponto de coordenadas $(0,0)$, é posição disponível para o carregamento de algum item. Quando um item é inserido, a posição que ele ocupa é excluída da lista de posições disponíveis, e até duas novas posições são adicionadas a ela. Em Zachariadis, Tarantilis e Kiranoudis (2009), até quatro novas posições podem ser adicionadas à lista de posições possíveis, mas duas delas não foram consideradas neste estudo. A FIGURA 16 mostra o mecanismo de inserção de um item: o item D é inserido na posição destacada na figura à esquerda, e o conjunto de posições disponíveis após a inserção dele é mostrado na figura à direita.

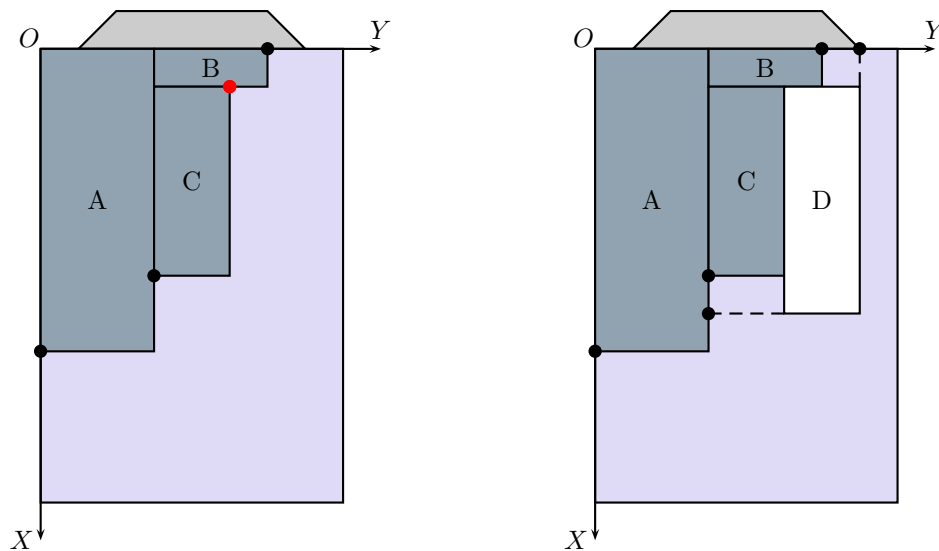


FIGURA 16 – PROCESSO DE CARREGAMENTO DE ITENS

Fonte – A autora(2016)

Para o caso sequencial, quando todos os itens de um cliente são carregados, as posições que não podem ser ocupadas pelos itens que ainda não foram carregados - e que pertencem a clientes que serão atendidos antes, são excluídas da lista de posições possíveis. Suponha um roteiro $0 - i_1 - i_2 - i_3 - 0$. Um carregamento parcial para este roteiro e as posições possíveis de carregamento de novos itens são mostrados na FIGURA 17. Tendo sido concluído o carregamento dos itens do cliente i_2 , antes de iniciar o carregamento dos itens do cliente i_1 as posições destacadas são excluídas da lista de posições possíveis, pois gerariam carregamentos que violariam a restrição de carregamento sequencial.

Como foi mencionado, a posição em que um item será carregado é determinada pela heurística que estiver sendo utilizada, sendo que cada uma das heurísticas emprega

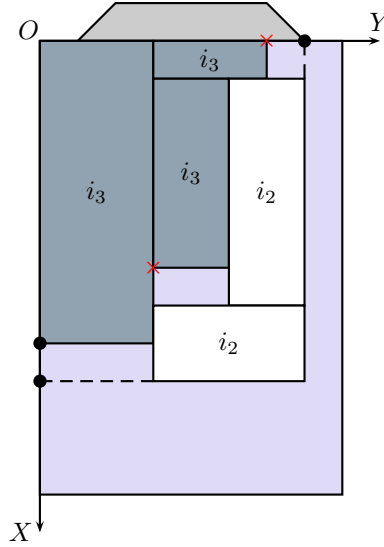


FIGURA 17 – POSIÇÕES INFECTÍVEIS PARA O CARREGAMENTO SEQUENCIAL

Fonte – A autora(2016)

um critério para selecionar esta posição (Heur_i ($i = 1, \dots, 6$)) ou para selecionar o item e a posição em que ele será carregado (Heur_7 , Heur_8). Tais critérios são detalhados a seguir.

Heur₁: *Bottom-Left Fill (X-axis)*

Dentre as posições possíveis factíveis para o carregamento do item, seleciona-se a posição com menor coordenada X . Em caso de empate, dentre as posições com coordenada X mínima, seleciona-se a que tiver menor coordenada Y . Com esta heurística, o carregamento tende a formar faixas paralelas ao eixo Y .

Heur₂: *Bottom-Left Fill (Y-axis)*

Dentre as posições possíveis factíveis para o carregamento do item, seleciona-se a posição com menor coordenada Y . Em caso de empate, dentre as posições com coordenada Y mínima, seleciona-se a que tiver menor coordenada X . Com esta heurística, o carregamento tende a formar faixas paralelas ao eixo X .

Heur₃: *Max Touching Perimeter*

Para todas as posições possíveis factíveis para o carregamento do item, calcula-se o perímetro de contato entre o item a ser carregado, e os itens já carregados e a superfície de carregamento do veículo, como é visto na FIGURA 18, que ilustra o perímetro de contato do item C pela linha escura tracejada. O item é carregado na posição com maior perímetro de contato correspondente. Esta heurística tende a espalhar os itens pelas bordas da superfície de carregamento, e só depois preencher a parte interna da mesma.

Heur₄: *Max Touching Perimeter no Walls*

Como na heurística *Max Touching Perimeter*, para todas as posições possíveis factíveis calcula-se o perímetro de contato, mas neste caso ele é dado pela soma das

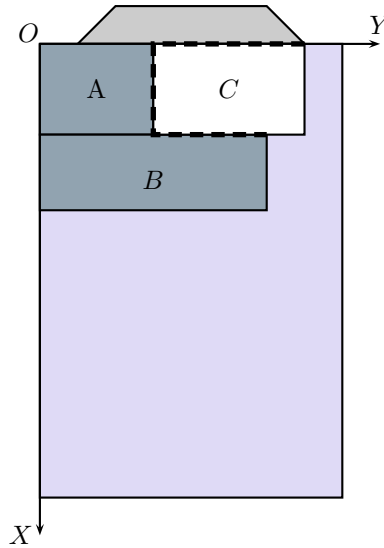


FIGURA 18 – CÁLCULO DO PERÍMETRO DE CONTATO NA HEURÍSTICA *Max Touching Perimeter*

Fonte – (ZACHARIADIS; TARANTILIS; KIRANOUDIS, 2009)

medidas das bordas comuns apenas entre o item a ser carregado e os itens já carregados, isto é, as bordas em comum entre o item a ser carregado e a superfície de carregamento não são consideradas. A posição escolhida é a que corresponde ao maior perímetro. A FIGURA 19 ilustra o cálculo da medida de avaliação para esta heurística, que tende a preencher a parte interna da superfície de carregamento antes de suas bordas.

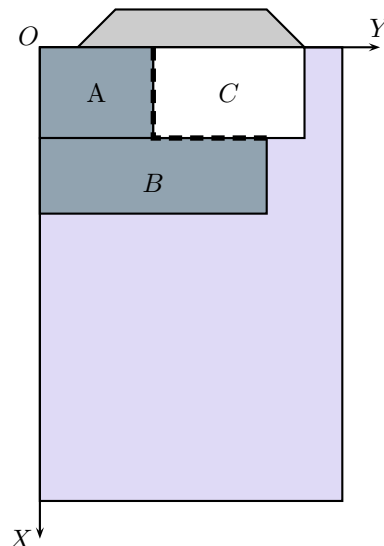


FIGURA 19 – CÁLCULO DO PERÍMETRO DE CONTATO NA HEURÍSTICA *Max Touching Perimeter no Walls*

Fonte – (ZACHARIADIS; TARANTILIS; KIRANOUDIS, 2009)

Heur₅: *Min Area*

Para todas as posições possíveis factíveis para o carregamento do item, calcula-se

a área da superfície retangular associada a ela, que é a superfície disponível para carregamento a partir da posição considerada, como mostra a FIGURA 20. A posição selecionada para o carregamento é a que corresponde à superfície retangular de mínima área, fazendo com que a superfície de carregamento seja melhor aproveitada.

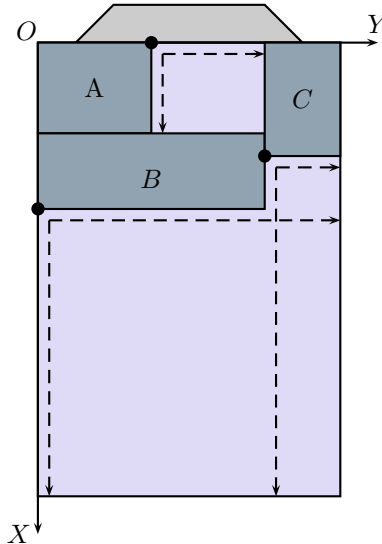


FIGURA 20 – ÁREA RETANGULAR NA HEURÍSTICA *Min Area*

Fonte – A autora(2016)

Heur₆: *Área Mínima Resultante*

Para todas as posições possíveis factíveis, calcula-se a área da superfície retangular resultante quando o item é carregado na respectiva posição, e seleciona-se a posição para a qual o carregamento resulta em uma região retangular com mínima área. A FIGURA 21 ilustra a superfície retangular que resulta do carregamento de um novo item *C*. Esta estratégia permite que o carregamento seja compacto, favorecendo o melhor aproveitamento do veículo.

As heurísticas $Heur_i$ ($i = 1, \dots, 6$) consideram uma das seguintes ordens para carregamento dos itens: maior dimensão w , maior dimensão l , e maior área, sendo estas ordens aplicadas sobre todos os itens, no caso irrestrito, ou sobre os itens do cliente a ser carregado, no caso sequencial. As heurísticas $Heur_7$ e $Heur_8$, que serão apresentadas a seguir, não ordenam os itens para o carregamento, pois analisam o carregamento de todos os itens possíveis de serem carregados em todas as respectivas posições possíveis factíveis, e seleciona um item e uma posição que melhor atendam ao critério.

Heur₇: *Máximo Perímetro Absoluto*

Para todos os itens a serem carregados, e para todas as correspondentes posições possíveis factíveis, calcula-se o perímetro absoluto, que é a soma das medidas das bordas em comum do item candidato a ser carregado e dos itens já carregados, e também do item a ser carregado e da superfície de carregamento (veja a FIGURA

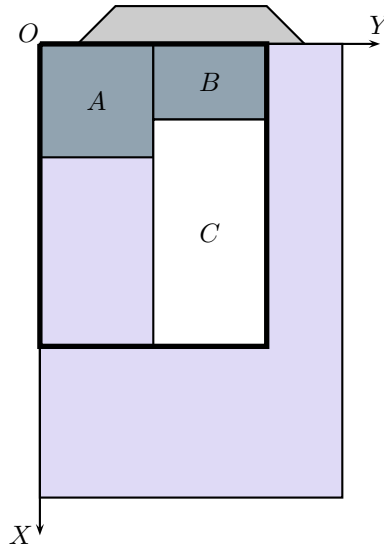


FIGURA 21 – ÁREAS RETANGULARES NA HEURÍSTICA Área Mínima Resultante
Fonte – A autora (2016)

18). A combinação entre item e posição que corresponder ao maior perímetro é escolhida e o carregamento é realizado. Nesta heurística, o primeiro item a ser carregado é o item de maior área.

Heur₈: *Máximo Perímetro Relativo*

Para todos os itens a serem carregados, e para todas as correspondentes posições possíveis factíveis, calcula-se o perímetro de contato relativo, dado pela proporção do perímetro do item que ficará em contato com as bordas dos itens já carregados e da superfície de carregamento.

Se todos os itens de todos os clientes do roteiro puderem ser carregados sem violar as restrições (sobreposição e, se for o caso, carregamento sequencial), então tem-se um carregamento factível. Para encontrar um carregamento factível para um roteiro, as heurísticas são utilizadas em sequência, isto é, se Heur₁ não encontrar um carregamento factível, são utilizadas, uma por vez, as heurísticas mais complexas Heur_{*i*} ($i = 2, \dots, 8$). Para as seis primeiras heurísticas, são testadas as três ordens de inserção dos itens (maior dimensão w , maior dimensão l , maior área). Quando alguma heurística encontra um carregamento factível, as demais heurísticas não precisam ser testadas. Por outro lado, se nenhuma heurística obtiver um carregamento factível, o roteiro é considerado infactível.

4.2 A META-HEURÍSTICA *SIMULATED ANNEALING*

Meta-heurísticas são uma classe de métodos aproximados que começaram a ser desenvolvidos na década de 80 para lidar com problemas de otimização complexos, para

os quais métodos exatos não eram capazes de obter soluções de modo eficiente, e por isso são geralmente aplicadas para resolução de problemas que não possuem um algoritmo específico que os resolvam satisfatoriamente (LOPES; RODRIGUES; STEINER, 2013). Podem ser formalmente definidas como um processo iterativo de geração de soluções que orienta uma heurística ao combinar diferentes conceitos para exploração e aproveitamento do espaço de busca, a fim de encontrar soluções quase ótimas.

Grande maioria das meta-heurísticas têm as seguintes características em comum: são inspiradas na natureza, isto é, são baseadas nos princípios da física, biologia, entre outras áreas; utilizam componentes estocásticos; não utilizam o gradiente ou a matriz hessiana da função objetivo; possuem alguns parâmetros que devem ser ajustados empiricamente para cada problema a ser resolvido.

Uma meta-heurística obterá bom desempenho para um problema de otimização se for capaz de ter um equilíbrio entre a diversificação e a intensificação da busca no espaço de soluções. A diversificação é necessária para identificar regiões do espaço de busca com soluções de alta qualidade, enquanto por outro lado é importante intensificar a busca nessas regiões promissoras. A principal diferença entre as meta-heurísticas é a forma como cada uma tenta atingir este equilíbrio. De modo geral, pode-se dizer que as meta-heurísticas baseadas em uma única solução são mais voltadas à intensificação da busca, enquanto as meta-heurísticas populacionais preocupam-se mais com a exploração do espaço de soluções. Revisões detalhadas sobre as diversas meta-heurísticas e aplicações podem ser encontradas em Osman e Laporte (1996), Gendreau e Potvin (2005), Gendreau e Potvin (2010) e Boussaïd, Lepagnot e Siarry (2013).

O *Simulated Annealing* (SA) é uma meta-heurística de solução única, pois a cada iteração o algoritmo move-se de uma solução para outra, descrevendo uma trajetória no espaço de busca. O seu uso para resolver problemas de otimização combinatória iniciou-se a partir dos trabalhos de Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) e Černý (1985), desenvolvidos de forma independente. O método tem sua origem na mecânica estatística, e é motivado por uma analogia ao processo físico de recozimento utilizado em metalurgia para obtenção de estados de baixa energia de um sólido. O recozimento consiste em elevar a temperatura do sólido e, em seguida, resfriá-lo lentamente para que os átomos que compõem o material se organizem em uma estrutura de energia mínima. Se o resfriamento for feito de maneira muito rápida, surgem irregularidades na estrutura do sólido, levando a estados relativamente altos de energia. Pelo contrário, o resfriamento lento através de vários níveis, em cada qual a temperatura é mantida por tempo suficiente para que se atinja o equilíbrio térmico, resulta em estruturas mais regulares e homogêneas. No contexto da otimização combinatória, uma solução equivale a um estado físico do sistema, o custo desta solução à energia do sistema no estado correspondente, e então a função objetivo do problema, analogamente à energia do material, deve ser minimizada, considerando uma temperatura fictícia T que é um parâmetro do algoritmo.

O algoritmo inicia com a geração, de forma aleatória ou heurística, de uma solução inicial s cujo custo é $f(s)$, e a inicialização da temperatura T . Então, a cada iteração, uma solução s' com custo $f(s')$ é aleatoriamente escolhida na vizinhança $N(s)$ da solução corrente s , e a diferença no custo das soluções é calculada por $\Delta = f(s') - f(s)$. Se for encontrada uma redução no valor da função objetivo, isto é, se $\Delta < 0$, a nova solução s' passa a ser a solução corrente s . Por outro lado, se $\Delta > 0$, a nova solução s' pode ser aceita, com probabilidade $p(T, \Delta) = \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right)$. Vê-se portanto que o SA aceita soluções que aumentam o valor da função objetivo, e tal aceitação é mais provável quando a temperatura T é alta e o aumento Δ na função objetivo é baixo. O parâmetro temperatura é reduzido progressivamente de acordo com um plano de resfriamento pré-estabelecido, e um determinado número de iterações é executado a cada nível de temperatura. Em geral, o algoritmo inicia com um valor alto de temperatura para permitir uma busca ampla no espaço de soluções, e quando a temperatura for suficientemente baixa, são aceitos apenas movimentos que melhorem a solução, de modo que o algoritmo alcance um ótimo local.

O método descrito corresponde a uma classe de algoritmos, e está apresentado na FIGURA 22. Para aplicar o SA a um problema particular de otimização combinatória, algumas escolhas precisam ser feitas, que Johnson *et al.* (1989) classifica em escolhas relacionadas ao problema, e escolhas genéricas do SA. Especificamente em relação ao problema de otimização que será tratado, deve-se escolher como serão representadas as soluções e como será calculado seu custo; e também definir como será determinada a solução inicial e a estrutura de vizinhança. Já as escolhas genéricas compreendem a determinação da temperatura inicial, a escolha de uma estratégia de redução progressiva da temperatura, também chamada estratégia de resfriamento, que por sua vez envolve o conceito genérico de “equilíbrio termodinâmico” mencionado no algoritmo, geralmente associado a um número pré-estabelecido de iterações para cada valor da temperatura. As escolhas feitas para o Algoritmo desenvolvido para o 2L-HFFVRP serão explicadas detalhadamente nas próximas seções.

4.2.1 Caracterização das Soluções

O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições de Carregamento Bidimensional foi descrito em detalhes na Seção 3.1. Dado um conjunto de clientes que demandam itens bidimensionais, e um depósito central no qual está disponível uma frota heterogênea de veículos, o objetivo do 2L-HFFVRP é encontrar um conjunto de roteiros factíveis de mínimo custo.

Um roteiro é definido como uma sequência $R_k = (i_1, i_2, \dots, i_{|R_k|})$ de visita aos clientes com $i_1 = i_{|R_k|} = 0$, e k é o tipo de veículo designado para a rota. O custo do roteiro R_k corresponde à soma dos custos de se percorrer os arcos que compõem tal roteiro pelo

Algoritmo: <i>Simulated Annealing</i>	
	Dados: Solução Inicial s ; Temperatura Inicial T
	Resultado: Solução ótima local s^*
1	enquanto o critério de parada não é satisfeito faça
2	repita
3	Selecione aleatoriamente $s' \in N(s)$;
4	Calcule $\Delta = f(s') - f(s)$;
5	se $\Delta \leq 0$ então
6	$s \leftarrow s'$;
7	$s^* \leftarrow s$
8	senão
9	$s \leftarrow s'$ com probabilidade $p(T, \Delta)$;
10	fim
11	até atingir o “equilíbrio termodinâmico” do sistema;
12	Atualize a temperatura T ;
13	fim

FIGURA 22 – ALGORITMO *Simulated Annealing*

Fonte – A autora (2016)

veículo associado a ele, acrescido do custo fixo relacionado a este veículo, ou seja, este custo é dado por $C(R_k) = F_k + \sum_{h=1}^{|R_k|-1} V_k d_{i_h, i_{h+1}}$. O roteiro R_k é dito factível se a demanda de todos os clientes visitados nele não excede a capacidade do veículo, e se houver um carregamento factível dos itens dos clientes no veículo. Os métodos para verificação da factibilidade do carregamento de um veículo foram tratados no Capítulo 4.1.

Uma solução para o 2L-HFFVRP consiste, portanto, em um roteiro para cada veículo disponível no depósito — aos veículos não utilizados associa-se um roteiro vazio. Em um problema com v veículos, uma solução particular será dada por $S = \{R_1, \dots, R_v\}$, e o custo de S será dado por $C(S) = \sum_{k=1}^v C(R_k)$.

4.2.2 Solução Inicial

A solução inicial para execução do SA pode ser obtida por algum método heurístico ou gerada aleatoriamente, entretanto a qualidade da solução inicial escolhida influencia diretamente no desempenho do algoritmo.

No 2L-HFFVRP, devido ao número limitado de veículos disponíveis no depósito e a suas capacidades, pode ser relativamente difícil encontrar uma solução inicial factível, pois é possível que algum veículo não possa atender algum cliente se ocorrer pelo menos uma das situações: a demanda do cliente excede a capacidade do veículo; a soma das áreas dos itens demandados pelo cliente excedem a área da superfície de carregamento

do veículo; a medida de alguma dimensão de algum item do cliente excede a dimensão correspondente da superfície de carregamento do veículo. Devido a estas limitações, para cada veículo k é estabelecido um subconjunto de clientes $ListaClientes_k$ que devem ser atendidos por este veículo ou outro maior (FIGURA 23).

Considerando que veículos com maior capacidade possuem maior custo fixo e também custo variável mais alto, dados v veículos disponíveis no depósito será assumido que $Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_v$, $F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_v$, $V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_v$, $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_v$ e $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_v$.

Além disso, serão definidos, para cada cliente i , os valores das maiores dimensões l e w de seus itens, $maxl_i$ e $maxw_i$ respectivamente, obtidos por $maxl_i = \max\{l_p\}, I_p \in IT_i$ e $maxw_i = \max\{w_p\}, I_p \in IT_i$.

Um determinado veículo k pode atender o cliente i se $D_i \leq Q_k$, $A_i \leq L_k W_k$, $maxl_i \leq L_k$ e $maxw_i \leq W_k$. Verifica-se se o cliente i pode ser atendido pelo veículo $k = 1, \dots, v$, até que seja encontrado um veículo possível k , o que implica que veículos de índice k ou superior podem atender o cliente i , e então o cliente i é inserido no conjunto $ListaClientes_k$.

Procedimento DeterminaVeiculos	
1	para $i = 1, \dots, n$ faça
2	$k = 1$;
3	enquanto $D_i \leq Q_k$ e $A_i \leq L_k W_k$ e $maxl_i \leq L_k$ e $maxw_i \leq W_k$ faça
4	$k = k + 1$;
5	fim
6	$ListaClientes_k \leftarrow ListaClientes_k \cup \{i\}$;
7	fim

FIGURA 23 – PROCEDIMENTO *DeterminaVeiculos()*

Fonte – A autora (2016)

Sabendo as restrições de atendimento de cada cliente, a solução inicial é construída dando prioridade aos clientes com mais restrições, isto é, aos clientes que só podem ser atendidos pelos veículos maiores. Esta escolha faz com que os primeiros veículos a serem utilizados sejam os de maior capacidade, e também maior custo; mas ao mesmo tempo possibilita melhor aproveitamento da frota como um todo.

Para construir a solução inicial, os v veículos são ordenados de forma decrescente em relação à sua capacidade Q_k , o que equivale a ordená-los do maior índice para o menor, e v rotas são geradas, uma para cada veículo. Para cada veículo k , os clientes do conjunto $ListaClientes_k$ são inseridos em algum roteiro k, \dots, v de modo que seja feita a inserção de menor custo que resultar em um roteiro com carregamento factível.

O custo da inserção do cliente i no roteiro k depende se o roteiro k é vazio ou se já possui algum cliente. Se o roteiro k for vazio, o custo de inserir o cliente i nele será dado pelo custo fixo do veículo, acrescido do custo de ir do depósito até o cliente e do cliente até

o depósito. Caso contrário, se o roteiro já possuir clientes, todas as posições para inserção do novo cliente têm que ser analisadas, e a posição escolhida é a que apresentar menor custo. Suponha, por exemplo, que se queira inserir o cliente i entre os clientes i' e i'' do roteiro k . O custo desta inserção será dado por $V_k(d_{i',i} + d_{i,i''} - d_{i',i''})$.

Pode ocorrer que esta metodologia não encontre uma solução inicial factível. Embora os últimos clientes a serem inseridos nos roteiros sejam mais flexíveis com relação aos veículos que podem atendê-los, pode ocorrer de não ser possível inseri-los em nenhum dos roteiros, devido à capacidade dos veículos ou à infactibilidade do carregamento resultante. Nos casos em que isto ocorre, selecciona-se aleatoriamente um cliente e um veículo que possa atendê-lo para realizar a primeira inserção, e o procedimento é reiniciado. O pseudo-código para a geração da solução inicial é mostrado na FIGURA 24.

Procedimento SolucaoInicial	
1	DeterminaVeiculos ();
2	Inicialize o conjunto dos clientes inseridos $Ins = \{\}$;
3	Inicialize a solução $S = \{R_1, \dots, R_k\}$;
4	para $k = v, \dots, 1$ faça
5	enquanto <i>houver clientes do conjunto ListaClientes_k não inseridos</i>
	faça
6	para $i \in ListaClientes_k / i \notin Ins$ faça
7	se for possível inserir o cliente i em algum roteiro
	$R_{k'} / k' = k, \dots, v$ então
8	para $k' = k, \dots, v /$ <i>seja possível inserir o cliente i no roteiro</i>
	$R_{k'}$ faça
9	Calcule o custo de inserção $c_{ik'}$ do cliente i no veículo k' ;
10	fim
11	senão
12	Selecione aleatoriamente um veículo $k' = 1, \dots, v$ e um cliente
	$i \in ListaCliente_{k'}$;
13	Reinicialize o conjunto dos clientes inseridos $Ins = \{\}$;
14	Reinicialize a solução $S = \{R_1, \dots, R_k\}$;
15	Insira o cliente i no roteiro $R_{k'}$ na posição 1;
16	Faça $Ins \leftarrow \{i\}$;
17	Vá para o passo 4;
18	fim
19	fim
20	Selecione a inserção factível que apresenta o menor custo $c_{ik'}$;
21	Insira o cliente i no roteiro $R_{k'}$ na posição de menor custo;
22	Faça $Ins \leftarrow Ins \cup \{i\}$;
23	fim
24	fim

FIGURA 24 – PROCEDIMENTO *SolucaoInicial()*

Fonte – A autora (2016)

A seguir será abordado o esquema de vizinhança usado no trabalho, que é uma

estratégia de extrema importância para o *Simulated Annealing*.

4.2.3 Estrutura de Vizinhaça

As meta-heurísticas baseadas em uma única solução, como é o caso do *Simulated Annealing*, executam a cada iteração um movimento no espaço de busca. A forma como é realizado este movimento é determinada pela definição de vizinhaça de uma solução, isto é, dada uma solução, as soluções que podem ser visitadas pelo algoritmo a partir dela são aquelas que fazem parte de sua vizinhaça. Por isto, a escolha da estrutura de vizinhaça desempenha um papel determinante no sucesso da aplicação do SA a um problema de otimização combinatória. Muitos pesquisadores se dedicaram a estudar o modo de determinação da vizinhaça no *Simulated Annealing* (HENDERSON; JACOBSON; JOHNSON, 2003).

A escolha da vizinhaça impõe uma topologia ao espaço de busca. Eglese (1990) defende que uma topologia suave com mínimos locais “rasos” é preferível a uma outra com mínimos locais “profundos”, pois isso está diretamente relacionado à convergência do algoritmo para ótimos globais, que depende da profundidade dos mínimos locais (HAJEK, 1988).

Outro fator a ser considerado é o tamanho da vizinhaça. Sabe-se apenas que é necessário que seja possível mover-se de uma solução para outra em um número finito de passos. Se o tamanho da vizinhaça é muito pequeno em relação à cardinalidade do espaço de busca, o algoritmo não se moverá rápido o suficiente para convergir em um tempo aceitável. Porém, uma vizinhaça muito grande torna o algoritmo essencialmente aleatório (GOLDSTEIN; WATERMAN, 1988).

No presente trabalho, a estrutura de vizinhaça foi determinada de modo que cada movimento efetue uma perturbação inter-rotas na solução. As melhorias intra-rotas serão feitas através de uma Busca Local que será apresentada na próxima Seção. Como no 2L-HFFVRP o espaço de busca é consideravelmente amplo, foram estabelecidos três tipos de movimentos para perturbar uma solução, ou seja, três vizinhanças N_1 , N_2 e N_3 .

A primeira vizinhaça N_1 está associada ao movimento Troca(1,0) de realocação de um cliente (WATERS, 1987). Este movimento transfere um cliente de sua posição em uma rota para uma posição em outra rota (FIGURA 25), e é capaz tornar algum roteiro vazio, reduzindo o número de veículos utilizado.

A vizinhaça N_2 representa as soluções obtidas através do movimento Troca(1,1) que troca a posição de dois clientes de duas rotas distintas, também introduzido por (WATERS, 1987) (FIGURA 26).

O movimento 2-opt-inter (LIN, 1965) define a vizinhaça N_3 . Dadas duas rotas, um cliente é selecionado em cada rota, um bloco é formado a partir do cliente selecionado

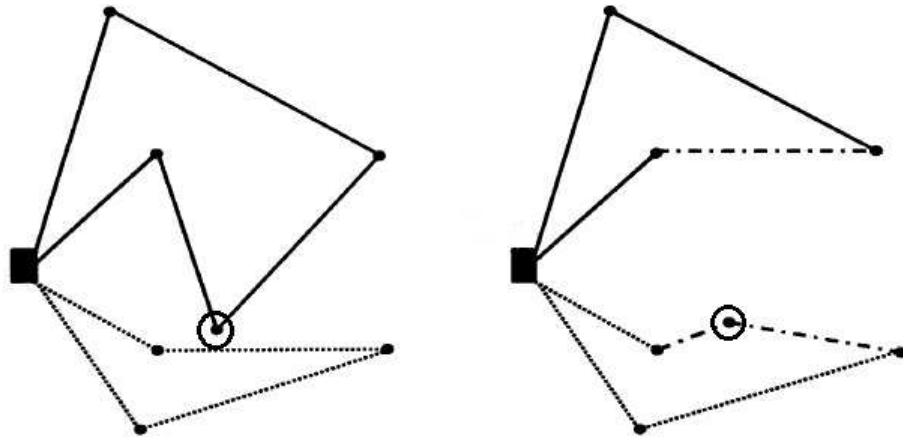


FIGURA 25 – MOVIMENTO Troca(1,0)

Fonte – A autora (2016)

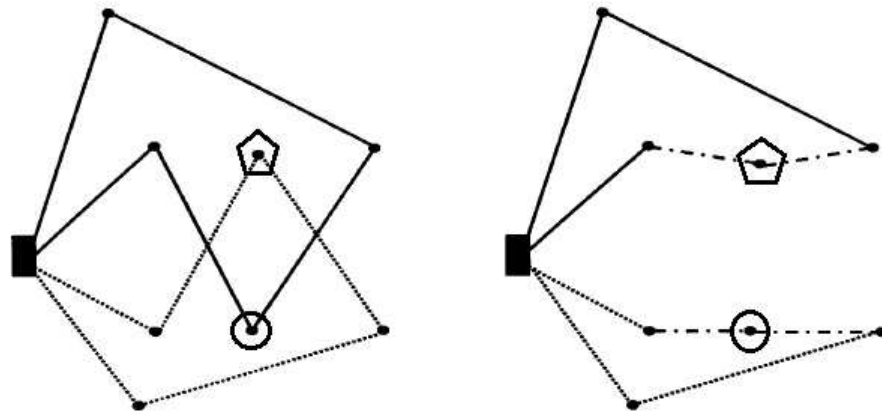


FIGURA 26 – MOVIMENTO Troca(1,0)

Fonte – A autora (2016)

até o último cliente da rota, e os blocos são trocados entre as rotas (FIGURA 27). Para a vizinhança N_3 , é permitido que para uma das rotas seja selecionado um cliente fictício, e nesse caso é feita a transferência de um bloco de clientes de uma rota para outra. Este artifício é utilizado com o intuito de possibilitar a redução no número de veículos utilizado.

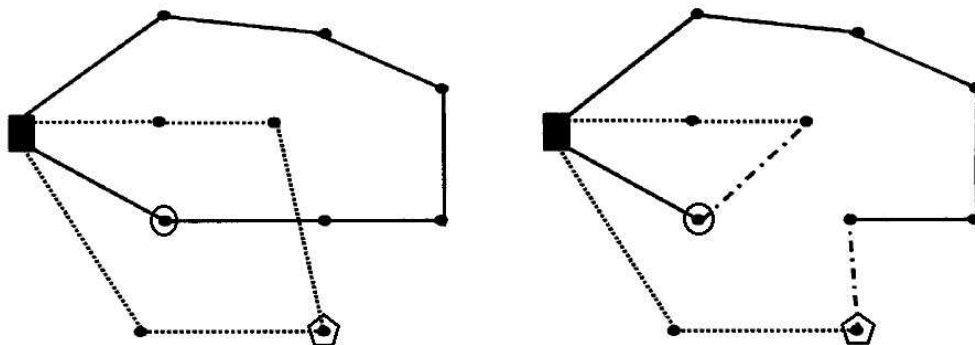


FIGURA 27 – MOVIMENTO 2-opt-inter

Fonte – A autora (2016)

4.2.4 Busca Local

A Seção anterior tratou dos movimentos de otimização inter-rotas. Ao encontrar uma nova solução, é feita uma modificação nos clientes atendidos pelos veículos, mas a configuração resultante de cada roteiro pode ainda ser melhorada. Como o conjunto de clientes é dividido entre os veículos, cada roteiro possui relativamente poucos clientes e portanto é viável lançar mão de um método de Busca Local para otimizar cada roteiro.

A Busca Local também realiza movimentos no espaço de soluções, mas o faz de forma exaustiva até que nenhuma melhoria possa ser obtida. O algoritmo de Busca Local implementado neste trabalho utiliza três tipos de movimentos semelhantes aos movimentos para melhoria inter-rotas já apresentados, mas apenas para clientes de um mesmo roteiro, e serão identificadas por N'_1 , N'_2 e N'_3 .

A primeira vizinhança N'_1 está associada ao movimento de realocação de um cliente (WATERS, 1987), que será chamado TrocaInt(1,0). Este movimento transfere um cliente de sua posição para uma outra posição no mesmo roteiro (FIGURA 28), e testa todas as possibilidades de realocação deste cliente em todas as outras posições do roteiro. N'_2 representa a vizinhança cujas soluções são obtidas pelo movimento de troca de posição de dois clientes no roteiro (WATERS, 1987), aqui chamado TrocaInt(1,1) (FIGURA 29). Por fim a vizinhança N'_3 é definida pelo método amplamente conhecido de troca de arcos 2-opt-intra (LIN, 1965). Cada movimento 2-opt-intra troca dois arcos do roteiro, o que equivale a trocar a posição de dois clientes e inverter a ordem dos clientes que estiverem entre eles (FIGURA 30).

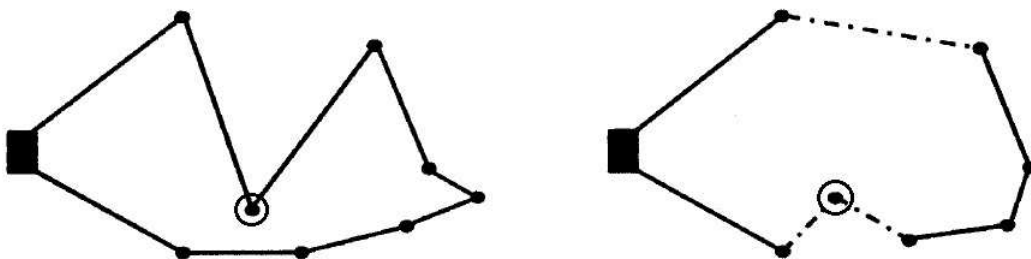


FIGURA 28 – MOVIMENTO TrocaInt(1,0)

Fonte – A autora (2016)

Os movimentos TrocaInt(1,0), TrocaInt(1,1) e 2-opt-intra são, um de cada vez e nesta ordem, aplicados ao roteiro, e analisam todos os possíveis movimentos, até que nenhuma melhoria seja mais encontrada. Com a utilização da Busca Local a cada vez que os movimentos de melhoria inter-rotas encontram uma solução factível, examina-se todos os vizinhos da nova solução em relação a N'_1 , N'_2 e N'_3 nesta ordem, isto é, examina-se outras configurações do roteiro com o novo conjunto de clientes.

Concebida a estrutura de vizinhança e o método de Busca Local a ser aplicado a cada nova solução obtida, os elementos do algoritmo específicos para o 2L-HFFVRP

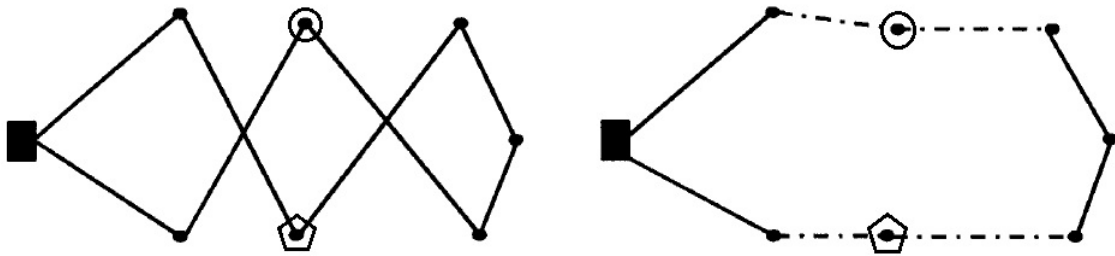


FIGURA 29 – MOVIMENTO TrocaInt(1,0)

Fonte – A autora (2016)

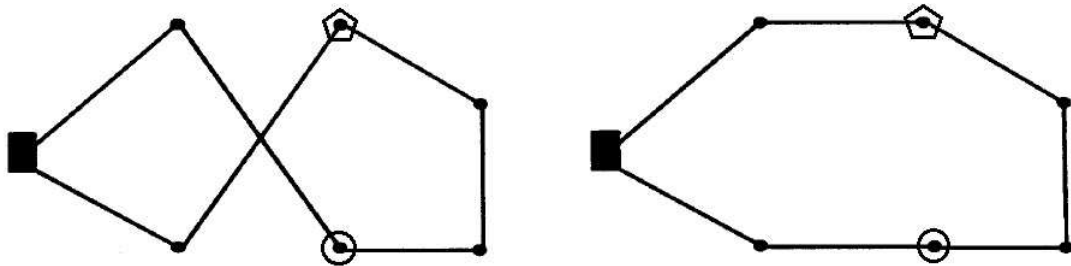


FIGURA 30 – MOVIMENTO 2-opt-intra

Fonte – A autora (2016)

estão todos estabelecidos. A seguir passa-se a discutir os elementos genéricos do SA.

4.2.5 Temperatura Inicial

Uma das principais propriedades do *Simulated Annealing* é sua capacidade de aceitar a realização de movimentos que geram soluções de maior custo que a solução corrente. A probabilidade de aceitação destes movimentos é determinante para avaliar a capacidade do SA de escapar de mínimos locais, e esta taxa de aceitação é estritamente relacionada à temperatura. Para que o SA encontre boas soluções, é preciso determinar cuidadosamente a temperatura inicial (BEN-AMEUR, 2004).

A probabilidade de aceitação de uma solução s' vizinha da solução atual s é dada por

$$p(T, \Delta) = \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \quad (4.1)$$

onde $\Delta = f(s') - f(s)$ é o incremento na função objetivo. Valores pequenos para Δ e grandes para T levam a uma maior probabilidade de aceitação da nova solução.

Na literatura são encontrados diversos métodos para calcular a temperatura inicial T_0 . Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) sugerem fazer $T_0 = \Delta_{max}$, onde Δ_{max} é a diferença máxima de custo entre duas soluções vizinhas. Desse modo, no pior caso de se obter uma nova solução cujo incremento na solução seja Δ_{max} , a probabilidade de aceitação desta solução será $\exp(-1) \approx 0.37$, ou seja, qualquer solução será aceita com

probabilidade de, no mínimo, 0.37.

Uma outra alternativa é definir uma temperatura inicial T_0 que faça com que uma solução vizinha com incremento Δ_{max} seja aceita com probabilidade p_0 (JOHNSON *et al.*, 1989; JOHNSON *et al.*, 1991). Isto equivale a fazer $p(T_0, \Delta) = \exp\left(-\frac{\Delta}{T_0}\right) = p_0$, que resulta em

$$T_0 = -\frac{\Delta}{\ln(p_0)} \quad (4.2)$$

A limitação desta estratégia está na dificuldade em obter Δ_{max} . Especificamente no problema que está sendo tratado neste trabalho, o 2L-HFFVRP, cada instância a ser resolvida possui suas particularidades, como distribuição geométrica dos clientes e custo dos veículos, o que faz com que o incremento do custo para soluções vizinhas tenha magnitudes diferentes em cada instância. Por isto optou-se por estimar um valor Δ_{max} a partir dos dados do problema. Para isto, aplica-se aleatoriamente à solução inicial os movimentos de vizinhança descritos anteriormente, obtendo uma solução vizinha desta, e calcula-se a diferença absoluta no custo das mesmas. O mesmo é feito para a nova solução obtida e o processo é repetido até que tenha sido gerado um determinado número de soluções vizinhas. O valor de Δ_{max} é então estimado pelo valor da máxima diferença observada entre as soluções geradas. Esta estratégia corresponde a executar o SA por um número de iterações com uma temperatura $T \rightarrow \infty$, configuração na qual qualquer solução é aceita. A questão agora é decidir quantas soluções vizinhas devem ser geradas, isto é, o tamanho da amostra para estimar Δ_{max} . Mais adiante, será discutido a respeito do número de iterações que serão executadas para cada valor da temperatura. Este também será o número de soluções vizinhas geradas para estimar Δ_{max} . Considerando que será gerado um número considerável de soluções antes de iniciar de fato a execução do algoritmo, não seria interessante desperdiçar boas soluções porventura encontradas nesse cenário exclusivamente aleatório do SA. Portanto, se alguma destas soluções for melhor que a solução inicial, a solução inicial é substituída por ela. A FIGURA 31 apresenta o pseudo-código para o cálculo de T_0 .

Além de Δ_{max} , para determinar a temperatura inicial utilizando 4.2, é preciso estabelecer uma probabilidade p_0 de que soluções com incremento Δ_{max} ou inferior sejam aceitas no início do SA.

4.2.6 Estratégia de Resfriamento

A estratégia de resfriamento do *Simulated Annealing* é a essência do algoritmo e é definida por uma função de diminuição da temperatura, um número de iterações a ser realizado para cada temperatura e um critério de parada. Tal estratégia pode ser estática, quando todos os parâmetros são definidos antes do início da execução do algoritmo, ou di-

Procedimento <i>TemperaturaInicial</i>	
Dados: Solução inicial s_0 ; número máximo de iterações n_{max}	
Resultado: Temperatura Inicial T_0	
1	Faça $\Delta_{max} = 0$;
2	para $i = 1, \dots, n_{max}$ faça
3	Selecione aleatoriamente uma vizinhança $N \in \{N_1, N_2, N_3\}$ e obtenha uma solução $s' \in N(s)$;
4	se s' <i>for factível</i> então
5	Aplique Busca Local nas rotas da solução s' ;
6	Calcule $\Delta_i = f(s') - f(s) $;
7	se $\Delta_i > \Delta_{max}$ então
8	$\Delta_{max} = \Delta_i$;
9	fim
10	fim
11	fim
12	$T_0 = -\frac{\Delta_{max}}{\ln(p_0)}$;

FIGURA 31 – PROCEDIMENTO *TemperaturaInicial()*

Fonte – A autora (2016)

nâmica, quando os parâmetros são modificados a partir de informações obtidas durante a execução do algoritmo. O desempenho de estratégias dinâmicas é superior, no entanto estratégias estáticas têm implementação mais simples. As escolhas adequadas são essenciais para controlar o tempo que o algoritmo leva para atingir uma solução ótima.

Existe uma grande variedade de propostas para a função de diminuição da temperatura. A primeira delas, e também a mais utilizada, foi proposta juntamente com o algoritmo SA por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) e utiliza uma função que diminui proporcionalmente a temperatura, dada por

$$T(t+1) = \alpha T(t) \quad (4.3)$$

onde α é uma constante, em geral escolhida entre 0,8 e 0,99, fazendo com que a temperatura diminua até que se tenha uma temperatura próxima de zero. A expressão 4.3 se baseia na analogia ao processo físico do recozimento de sólidos. Outras funções para diminuição da temperatura, baseadas em resultados teóricos sobre a convergência do SA, são apresentadas em Romeo e Sangiovanni-Vincentelli (1991).

Para o esquema clássico no qual a temperatura é diminuída pela expressão 4.3, a partir de uma temperatura inicial T_0 , a temperatura é mantida constante por L iterações. De acordo com a analogia à física, o número L deve ser escolhido de modo a fazer com que o sistema atinja o equilíbrio térmico à temperatura correspondente, o que é bastante subjetivo, visto que não é trivial definir o equilíbrio térmico quando se aplica o SA a problemas de otimização, e muito pouco se encontra a respeito disso na literatura.

Geralmente, use-se um número fixo de novas soluções geradas ou de novas soluções aceitas, supondo que isso seja suficiente para que o sistema se equilibre, mas estes

métodos dependem diretamente do problema a ser resolvido e da vizinhança utilizada. Uma abordagem mais complexa para a escolha de L , baseada no valor esperado do custo das soluções e em sua variância em uma dada temperatura, pode ser encontrada em Romeo (1989).

Por último, um critério de parada estabelece quando o algoritmo deve ser finalizado. Pode ser definido um número fixo de decréscimos na temperatura, mas nesse caso não se teria nenhuma evidência da convergência do algoritmo, pois a temperatura no final da execução pode não ser suficientemente baixa. Outra alternativa é definir uma temperatura final a ser atingida, assim tem-se controle sobre a probabilidade de se aceitar uma solução ao fim do algoritmo independentemente da temperatura inicial escolhida. Pode-se ainda finalizar a execução do algoritmo se nenhuma solução for aceita para um determinado número de valores de temperatura. Outros critérios de parada, de maior complexidade, são citados por Romeo e Sangiovanni-Vincentelli (1991).

4.3 ALGORITMO SA-BL PARA O 2L-HFFVRP

Após apresentar a meta-heurística *Simulated Annealing* e discutir alguns aspectos particulares do método SA, é possível conceber um método baseado nesta meta-heurística para resolver o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento. Conforme já foi mencionado, a estrutura de vizinhança foi estabelecida de modo que os movimentos explorem melhorias inter-rotas nas soluções. A otimização em cada roteiro é realizada por uma Busca Local, para cada movimento factível executado. Por isso, o algoritmo proposto é chamado SA-BL.

No SA-BL, gera-se uma solução inicial pelo procedimento descrito da FIGURA 24. À solução criada aplica-se as melhorias intra-rotas através da Busca Local descrita na Seção 4.2.4.

Para dar prosseguimento ao algoritmo, são definidos os parâmetros para execução do *Simulated Annealing*, os quais são: temperatura inicial T_0 , obtida como consta na FIGURA 31; o número L de iterações para cada valor de temperatura T , isto é, o número de novas soluções factíveis geradas para uma temperatura; a taxa α de redução da temperatura; e a temperatura final T_f , que será um dos critérios de parada do algoritmo.

A partir daí, dada a temperatura inicial T_0 , são geradas L soluções vizinhas através de um dos movimentos Troca(1,0), Troca(1,1) e 2-opt-inter, selecionados com igual probabilidade, e cada nova solução é melhorada pela Busca Local e avaliada. Uma nova solução será aceita se o seu custo for menor que o da solução atual ou, caso não seja, ela será aceita com probabilidade dada por 4.1. Após a geração das L soluções vizinhas, a temperatura é atualizada pela expressão 4.3 e o processo iterativo é repetido. O algoritmo finaliza quando a temperatura se torna menor que T_f , ou quando nenhuma nova solução

é aceita após duas atualizações consecutivas na temperatura.

Para tornar o algoritmo mais rápido, se for encontrada uma solução com custo menor que o custo da melhor solução encontrada, atualiza-se a temperatura. Além disso, é possível que o algoritmo demande muito tempo a procurar soluções factíveis, isto é, é possível que, dependendo das características do problema, uma solução não tenha número suficiente de soluções vizinhas factíveis. Por este motivo, a cada temperatura, um número máximo de tentativas de encontrar soluções vizinhas factíveis é estabelecido, e será denotado por $pert_{max}$. O pseudo-código para o algoritmo SA-BL completo é mostrado na FIGURA 32.

4.4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O algoritmo SA-BL foi utilizado para resolver instâncias do 2L-HFFVRP, para os casos Irrestrito e Sequencial. Como não há instâncias para o 2L-HFFVRP na literatura, foram criadas instâncias a partir das instâncias do 2L-HFVRP. A seguir será explicado como foram obtidas as instâncias, quais foram os parâmetros utilizados para execução do algoritmo, e por fim os resultados obtidos.

4.4.1 Descrição das Instâncias Utilizadas nos Testes

As instâncias utilizadas para analisar o desempenho do algoritmo SA-BL para resolução do 2L-HFFVRP são similares às instâncias propostas por Leung *et al.* (2013) para o 2L-HFVRP, exceto pelo fato de que o número de veículos de cada tipo é fixo e não ilimitado. As instâncias para o 2L-HFVRP, por sua vez, foram obtidas a partir das instâncias para o 2L-CVRP (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007). A restrição na quantidade de veículos disponíveis torna o problema consideravelmente mais complexo que na versão com frota ilimitada, pois muitos roteiros são infactíveis para alguns veículos. Por exemplo, no problema com frota ilimitada, dado um roteiro que pode ser atendido por algum tipo de veículo disponível, seleciona-se um tipo de veículo com capacidade suficiente para atendê-lo, e isto sempre será possível uma vez que não há limite no número de veículos de cada tipo disponíveis; já no problema com frota fixa, dado um roteiro factível, seleciona-se, dentre os veículos ainda não utilizados, algum que seja capaz de atender tal roteiro, porém é possível que nenhum dos veículos não utilizados tenha capacidade suficiente para atender o roteiro, isto é, todos os veículos do tipo que teria capacidade de atender o roteiro já foram utilizados, o que faz com que o problema com frota fixa tenha soluções piores que o problema com frota ilimitada, e leve mais tempo para ser resolvido.

O conjunto de instâncias para o 2L-CVRP é composto por 36 instâncias, cada uma

com 5 classes, e foi obtido como segue. Os problemas da Classe 1 não estão relacionados ao problema de carregamento, e constituem somente um problema de roteamento, visto que cada cliente demanda apenas um item de dimensões unitárias. Nos problemas das Classes 2, 3, 4 e 5, para cada cliente i foi gerado um conjunto de m_i itens com distribuição uniforme em um intervalo. Cada item é classificado, com igual probabilidade, dentre as formas vertical, homogêneo e horizontal, e suas dimensões foram geradas uniformemente em um intervalo. A TABELA 5 mostra, para cada classe 2-5, os intervalos nos quais os dados foram gerados, sendo L e W as dimensões da superfície de carregamento dos veículos, lembrando que no 2L-CVRP há apenas um tipo de veículo disponível.

Algoritmo: SA-BL

Dados: Informações sobre os clientes: demandas e matriz de distâncias;
 Informações sobre os veículos: capacidades, custos fixos e custos variáveis;
 Parâmetros do *Simulated Annealing*: probabilidade p_0 de aceitação da pior solução estimada na temperatura inicial; número de iterações por temperatura L ; número máximo de perturbações por temperatura $pert_{max}$; taxa de diminuição da temperatura α ; temperatura final T_f

Resultado: Solução ótima local s^*

```

1 Construa uma solução inicial  $s_0$  com o procedimento SolucaoInicial ();
2 Aplique a Busca Local à solução inicial  $s_0$ ;
3 Determine a temperatura inicial  $T_0$  com o procedimento
  TemperaturaInicial ();
4 Inicialize a temperatura  $T = T_0$ ;
5  $s \leftarrow s_0$ ;  $s^* \leftarrow s$ ;
6  $cont_{ext} = 0$  ; /* contador de temperaturas sem modificação na
  solução */
7 enquanto  $T > T_f$  e  $cont_{ext} < 2$  faça
8    $pert = 0$  ; /* contador de perturbações */
9    $iter = 0$  ; /* contador de soluções factíveis geradas */
10   $cont_{int} = 0$  ; /* contador de novas soluções aceitas */
11  enquanto  $iter < L$  e  $pert < pert_{max}$  faça
12     $pert = pert + 1$ ;
13    Selecione aleatoriamente uma vizinhança  $N_1, N_2, N_3$ ;
14    Obtenha uma solução vizinha  $s' \in N(s)$ ;
15    Verifique a factibilidade de  $s'$ ;
16    se  $s'$  é factível então
17      Aplique a Busca Local a  $s'$ ;
18      Calcule  $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
19      se  $\Delta \leq 0$  então
20         $s \leftarrow s'$ ;
21         $cont_{int} = cont_{int} + 1$ ;
22         $s^* \leftarrow s$ ;
23        Vá para o Passo 37;
24      senão
25         $prob = Rnd()$ ;
26        se  $prob \leq p(T, \Delta) = \exp(-\frac{\Delta}{T})$  então
27           $s \leftarrow s'$ ;
28        fim
29      fim
30    fim
31  fim
32  se  $cont_{int} = 0$  então
33     $cont_{ext} = cont_{ext} + 1$ ;
34  senão
35     $cont_{ext} = 0$ ;
36  fim
37  Atualize a temperatura fazendo  $T = \alpha \cdot T$ ;
38 fim
39 retorne  $s^*$ ;
```

FIGURA 32 – ALGORITMO SA-BL

Fonte – A autora (2016)

TABELA 5 – CARACTERÍSTICAS DOS ITENS DAS CLASSES 2-5

Classe	m_i	Vertical		Homogêneo		Horizontal	
		Comp.	Larg.	Comp.	Larg.	Comp.	Larg.
2	[1,2]	[0,4L;0,9W]	[0,1L;0,2W]	[0,2L;0,5W]	[0,2L;0,5W]	[0,1L;0,2W]	[0,4L;0,9W]
3	[1,3]	[0,3L;0,8W]	[0,1L;0,2W]	[0,2L;0,4W]	[0,2L;0,4W]	[0,1L;0,2W]	[0,3L;0,8W]
4	[1,4]	[0,2L;0,7W]	[0,1L;0,2W]	[0,1L;0,4W]	[0,1L;0,4W]	[0,1L;0,2W]	[0,2L;0,7W]
5	[1,5]	[0,1L;0,6W]	[0,1L;0,2W]	[0,1L;0,3W]	[0,1L;0,3W]	[0,1L;0,2W]	[0,1L;0,6W]

Fonte – (IORI; SALAZAR-GONZÁLEZ; VIGO, 2007)

Para cada instância do 2L-CVRP, Leung *et al.* (2013) substituíram as informações sobre os veículos idênticos por informações de capacidade, comprimento e largura da superfície de carregamento, custo fixo e custo variável de quatro tipos de veículos A, B, C e D. Para as 5 classes de uma mesma instância, os tipos de veículos são os mesmos, e suas características estão disponíveis na TABELA 6, na qual Q_k , L_k , W_k , F_k e V_k denotam, respectivamente, quantidade, comprimento, largura, custo fixo e custo variável dos veículos do tipo $k = A, B, C, D$.

TABELA 6 – CARACTERÍSTICAS DOS TIPOS DE VEÍCULOS

Inst	A					B					C					D				
	Q_A	L_A	W_A	F_A	V_A	Q_B	L_B	W_B	F_B	V_B	Q_C	L_C	W_C	F_C	V_C	Q_D	L_D	W_D	F_D	V_D
1	20	10	10	10	1,0	25	15	15	20	1,1	40	25	25	30	1,2	60	40	20	40	1,3
2	20	10	10	10	1,0	25	15	15	20	1,1	40	25	25	30	1,3	55	40	20	40	1,5
3	20	10	10	10	1,0	30	15	15	20	1,1	60	40	20	40	1,2					
4	20	10	10	10	1,0	40	20	20	20	1,1	60	40	20	30	1,2					
5	1000	10	10	10	1,0	2500	15	15	20	1,1	4000	25	25	30	1,3	6000	40	20	50	1,5
6	2000	10	10	10	1,0	2500	15	15	20	1,1	4000	40	20	30	1,3					
7	200	10	10	10	1,0	500	15	15	20	1,1	2000	25	25	120	6,0	4500	40	20	250	8,0
8	200	10	10	10	1,0	500	15	15	20	1,1	2000	25	25	120	5,0	4500	40	20	250	10,0
9	20	10	10	10	1,0	25	15	15	20	1,1	48	40	20	30	1,3					
10	200	10	10	10	1,0	500	15	15	20	1,1	2000	25	25	120	8,0	4500	40	20	250	10,0
11	200	10	10	10	1,0	500	15	15	20	1,1	2000	25	25	120	8,0	4500	40	20	250	10,0
12	20	10	10	10	1,0	25	15	15	20	1,1	40	40	20	30	1,3					
13	2000	10	10	10	1,0	5000	15	15	50	2,0	30000	40	20	200	10,0					
14	500	10	10	10	1,0	1500	15	15	50	2,1	3000	20	20	400	3,2	5000	40	20	800	5,0
15	500	10	10	10	1,0	1500	15	15	50	2,1	3000	20	20	400	3,2	5000	40	20	800	5,0
16	20	10	10	10	1,0	40	20	20	20	1,1	60	40	20	30	1,2					
17	20	10	10	10	1,0	25	15	15	20	1,1	40	25	25	30	1,3	60	40	30	40	1,4
18	200	10	10	10	1,0	500	20	10	30	2,0	2000	40	20	120	5,0					
19	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	150	40	20	90	5,0
20	2000	10	10	10	1,0	4000	20	10	20	1,1	10000	30	15	60	4,0	30000	40	20	150	8,0
21	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
22	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
23	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
24	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	100	40	20	60	3,2
25	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
26	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
27	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	100	40	20	60	3,2
28	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
29	200	10	10	10	1,0	500	20	10	30	2,0	2000	40	20	120	8,0					
30	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
31	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
32	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
33	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
34	20	10	10	10	1,0	40	20	10	20	1,1	60	20	15	30	1,2	200	40	20	120	8,0
35	200	10	10	10	1,0	400	20	10	20	1,5	1000	40	20	60	4,0					
36	100	10	10	10	1,0	200	15	15	20	1,1	300	30	20	30	1,2	400	40	20	40	1,3

Fonte – (LEUNG *et al.*, 2013)

Para o 2L-HFFVRP, as instâncias foram geradas limitando-se o número de veículos de cada tipo disponíveis, isto é, foram determinadas as quantidades n_A , n_B , n_C e n_D de veículos dos tipos A, B, C e D, respectivamente, disponíveis no depósito para atendimento aos clientes. Tais quantidades foram determinadas de modo a minimizar a quantidade de veículos dos tipos D , C , B e A , nesta ordem, ou seja, minimizar a quantidade dos veículos com maior custo fixo. Assim, primeiramente determinou-se a quantidade n_D , depois n_C , n_B e n_A , respectivamente, através do algoritmo que gera a solução inicial, isto é, para cada tipo de veículo, já tendo sido estabelecidas as quantidades dos tipos de veículos com maior custo fixo, determina-se a quantidade mínima deste tipo de veículo para a qual o algoritmo consegue encontrar uma solução inicial factível.

A forma como a quantidade de cada tipo de veículo foi determinada não garante que a frota considerada nos testes corresponda à configuração ótima da frota de veículos, isto é, às quantidades de cada tipo de veículo que leva ao mínimo custo dos roteiros, por isto, as soluções obtidas para o 2L-HFFVRP podem ser piores que as soluções obtidas para o 2L-FSMVRP. Além disso, como as quantidades de cada tipo de veículo foram determinadas a partir de um algoritmo heurístico, é possível que tais quantidades possam ser reduzidas e, ainda assim, o problema terá solução factível.

Para as cinco classes de uma mesma instância é utilizada a mesma composição da frota. A TABELA 7 apresenta, para cada instância, o número n de clientes e a composição da frota para cada instância, dada pelas quantidades n_A , n_B , n_C e n_D de cada tipo de veículo A , B , C e D . Além disso, para as Classes 2-5, são fornecidas informações gerais a respeito dos problemas, quais sejam número de itens B e taxa de ocupação %ocup. da superfície de carregamento dos veículos. Para muitas instâncias, os veículos do tipo A , de menor capacidade, não foram utilizados. A capacidade de peso e a superfície de carregamento destes veículos é muito pequena, poucos são os clientes que podem ser atendidos por eles. Além disso estes clientes, com demandas menores, podem ser atendidos pelos veículos maiores, ocupando os espaços ociosos deles.

TABELA 7 – CARACTERÍSTICAS DAS INSTÂNCIAS PARA O 2L-HFFVRP

Inst	n	Frota				Classe 2		Classe 3		Classe 4		Classe 5	
		n_A	n_B	n_C	n_D	B	% ocup.	B	% ocup.	B	%ocup.	B	%ocup.
1	15	0	2	3	2	24	47,80	31	50,06	37	57,17	45	49,40
2	15	0	0	3	3	25	48,96	31	55,30	49	49,75	48	36,54
3	20	0	3	5		29	58,35	46	65,48	44	53,03	49	46,20
4	20	1	3	4		32	61,38	43	61,96	50	67,69	62	49,93
5	21	0	2	2	2	31	70,00	37	72,85	41	73,39	57	63,97
6	21	0	4	5		33	52,59	40	61,88	57	70,14	56	45,45
7	22	0	3	3	2	32	68,55	41	63,78	51	64,53	55	56,19
8	22	0	3	1	3	29	67,95	42	76,38	48	74,00	52	48,81
9	25	0	1	8		40	54,78	61	58,93	63	58,04	91	51,20
10	29	0	5	4	2	43	67,71	49	60,17	72	78,09	86	67,27
11	29	0	1	5	3	43	63,95	62	72,21	74	80,63	91	61,72
12	30	0	6	14		50	35,75	56	29,56	82	37,63	101	33,44
13	32	0	1	6		44	77,15	56	75,40	78	85,93	102	74,83
14	32	1	3	3	4	47	70,26	57	70,59	65	66,05	87	60,43
15	32	0	5	5	4	48	57,33	59	63,37	84	72,71	114	72,44
16	35	0	10	7		56	50,82	74	51,95	93	58,28	114	44,47
17	40	1	3	13	5	60	34,63	73	31,45	96	38,66	127	30,12
18	44	0	5	7		66	67,83	87	79,11	112	81,46	122	61,51
19	50	1	4	8	8	82	70,21	103	74,86	134	77,85	157	60,06
20	71	1	7	14	6	104	74,77	151	79,48	178	82,30	226	69,93
21	75	2	6	12	11	114	68,19	164	80,59	168	69,03	202	59,72
22	75	1	6	8	12	112	73,92	154	78,35	198	83,98	236	67,90
23	75	0	8	10	11	112	71,70	155	79,07	179	79,66	225	68,48
24	75	0	4	9	13	124	79,06	152	75,24	195	80,09	215	64,42
25	100	0	10	12	15	157	79,20	212	80,99	254	82,77	311	65,24
26	100	1	14	8	15	147	73,38	198	76,27	247	80,86	310	69,14
27	100	1	6	18	14	152	71,55	211	80,53	245	76,26	320	69,91
28	120	2	9	17	16	183	76,85	242	83,27	299	83,94	384	72,82
29	134	0	17	24		197	72,35	262	76,03	342	84,73	422	73,81
30	150	3	9	17	22	225	77,92	298	84,10	366	83,51	433	67,71
31	199	1	17	36	26	307	73,07	402	77,67	513	82,19	602	66,72
32	199	3	28	20	26	299	78,45	404	80,82	497	82,39	589	69,85
33	199	1	19	24	29	301	73,63	407	80,66	499	83,02	577	68,06
34	240	1	33	29	33	370	75,11	490	80,19	604	82,51	720	69,24
35	252	6	22	46		367	74,47	507	81,19	634	85,66	762	70,66
36	255	7	33	46	9	387	75,71	511	81,37	606	78,55	786	70,53

Fonte – A autora (2016)

4.4.2 Configuração dos Parâmetros para o SA-BL

O algoritmo SA-BL proposto neste trabalho requer que sejam determinados alguns parâmetros: probabilidade p_0 de aceitação da pior solução estimada na temperatura inicial, número de iterações por temperatura L , número máximo de perturbações por temperatura $pert_{max}$, taxa de redução da temperatura α e temperatura final T_f . Tais parâmetros foram escolhidos a partir de testes empíricos, a fim de obter um equilíbrio entre a qualidade das soluções obtidas e o tempo computacional utilizado para execução do algoritmo, e a TABELA 8 mostra os valores para cada um destes parâmetros.

TABELA 8 – PARÂMETROS PARA O ALGORITMO SA-BL

Parâmetro	Valor
p_0	0,2
L	1000
$pert_{max}$	100000
α	0,9
T_f	0,01

Fonte – A autora (2016)

A probabilidade p_0 de aceitação da pior solução estimada foi fixada em 0,2, pois para valores mais altos, que permitem uma maior diversificação no espaço de busca, o algoritmo inicia com temperaturas iniciais mais altas. Isto faz com que o algoritmo fique por muito tempo com temperaturas altas obtendo, na maior parte dos casos, apenas soluções piores que a solução inicial, além de que o mesmo leva mais tempo para atingir a temperatura final estabelecida como critério de parada.

Os parâmetros L e $pert_{max}$, estabelecidos em 1000 e 100000 respectivamente, forneceram bons resultados em um baixo tempo computacional. No caso das soluções terem bom número de soluções vizinhas factíveis, $L = 1000$ faz diminuir a temperatura após terem sido analisadas 1000 soluções vizinhas. Em contrapartida, no caso de as características do problema fazerem com que as soluções tenham muito poucas soluções vizinhas factíveis, $pert_{max} = 100000$ leva à diminuição da temperatura sem que o algoritmo despenda tempo em excesso procurando por soluções vizinhas factíveis.

A taxa α de decréscimo da temperatura e a temperatura final T_f , foram fixadas em 0,9 e 0,01. Esta escolha permite uma diminuição lenta da temperatura, e faz com que o algoritmo seja executado até que apenas incrementos suficientemente pequenos da função objetivo sejam aceitos, favorecendo a convergência do algoritmo.

4.4.3 Resultados Obtidos

O algoritmo SA-BL foi implementado em Visual Basic .Net, e os experimentos foram executados em um microcomputador Core i5 1.40 GHz, com 8 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 10.

As instâncias descritas na Seção 4.4.2 foram resolvidas pelo SA-BL para os casos Irrestrito e Sequencial. Como nenhuma abordagem para o 2L-HFFVRP foi encontrada na literatura, serão comparadas a solução inicial construída heurísticamente no início do algoritmo, e a solução final obtida ao final da execução do SA-BL. Além disso, é apresentada também uma comparação dos resultados obtidos pelo SA-BL para o 2L-HFFVRP, e os resultados do algoritmo SA-HLS de Leung *et al.* (2013) para o 2L-FSMVRP, embora seja esperado que as soluções para o 2L-HFFVRP tenham custo mais elevado devido às restrições sobre a frota. Os resultados apresentados para o SA-BL correspondem aos melhores resultados obtidos em 5 execuções do algoritmo.

Como os problemas da Classe 1 correspondem ao problema simples de roteamento de veículos com frota heterogênea fixa, não são considerados para eles os casos irrestrito ou sequencial. A TABELA 9 mostra os resultados para tais problemas. São apresentados a solução inicial S_0 (1) e a solução final S_f (2) do algoritmo SA-BL, o tempo $t(s)$, em segundos, que o algoritmo levou para ser executado, e a melhoria percentual da solução final sobre a solução inicial, denotado por $\%gap$ (2-1). Além disso, também são apresentados os resultados do algoritmo SA-HLS de Leung *et al.* (2013) para o 2L-FSMVRP dados por S (3), e a diferença percentual dos resultados obtidos pelo SA-BL para o 2L-HFFVRP e do resultado obtido pelo referido autor para o 2L-FSMVRP, representada por $\%gap$ (2-3).

TABELA 9 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 1

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	762,47	671,58	4,03	-11,92	596,07	12,67
2	835,19	734,77	4,61	-12,02	679,18	8,18
3	918,88	840,13	2,41	-8,57	745,51	12,69
4	901,01	779,93	4,44	-13,44	694,33	12,33
5	1000,39	826,57	4,83	-17,38	761,19	8,59
6	1009,38	882,98	8,83	-12,52	809,56	9,07
7	6399,44	4375,03	12,61	-31,63	3211,53	36,23
8	7139,17	4784,89	8,00	-32,98	3184,45	50,26
9	1224,22	1101,61	15,84	-10,02	1029,95	6,96
10	7168,71	5418,45	17,31	-24,42	5149,51	5,22
11	7618,76	5914,32	41,10	-22,37	5119,40	15,53
12	1895,53	1866,71	1,95	-1,52	1658,56	12,55
13	30097,54	21045,34	49,89	-30,08	14655,40	43,60
14	12026,65	10699,15	17,45	-11,04	10019,00	6,79
15	10891,23	10776,16	28,89	-1,06	10151,70	6,15
16	1699,91	1469,58	6,05	-13,55	1292,58	13,69
17	2365,95	2179,40	9,23	-7,89	1770,83	23,07
18	4632,82	3445,01	48,06	-25,64	3140,55	9,69
19	2605,59	2208,82	20,41	-15,23	1553,11	42,22
20	2454,67	2299,14	67,14	-6,34	1956,97	17,48
21	5251,37	4177,01	54,46	-20,46	2567,18	62,71
22	7295,67	5418,05	33,85	-25,74	2605,90	107,91
23	5893,66	4798,34	29,24	-18,58	2653,84	80,81
24	4155,13	3696,43	43,77	-11,04	2555,41	44,65
25	5842,29	4911,52	53,70	-15,93	2972,59	65,23
26	7887,09	7658,30	65,19	-2,90	4049,64	89,11
27	4030,35	3660,59	33,63	-9,17	3561,58	2,78
28	5078,79	5053,22	105,49	-0,50	6858,35	-26,32
29	11070,20	10537,08	221,14	-4,82	9695,00	8,69
30	9959,07	8479,73	58,11	-14,85	5663,33	49,73
31	9950,57	9181,98	78,58	-7,72	8054,90	13,99
32	11515,99	10785,02	98,38	-6,35	8408,61	28,26
33	11270,74	10615,67	65,35	-5,81	8555,58	24,08
34	7347,54	7258,49	95,03	-1,21	5536,63	31,10
35	5400,05	5367,14	256,96	-0,61	4444,59	20,76
36	3565,62	3556,34	55,68	-0,26	3669,89	-3,09
Média	6087,82	5207,62	47,82	-12,65	4167,57	26,48

Fonte – A autora (2016)

Como pode ser visto na TABELA 9, o algoritmo SA-BL melhorou a solução inicial, em média, em 12,65%. Apesar de as soluções encontradas pelo SA-BL para o 2L-HFFVRP serem 26,48% piores que as soluções obtidas para o 2L-FSMVRP, o algoritmo proposto neste trabalho encontrou soluções melhores que as de Leung *et al.* (2013) para duas instâncias da Classe 1 (instâncias 28 e 36).

As TABELAS 10-13 mostram os resultados para as instâncias das Classes 2-5 para o caso Sequencial, que mostram a solução inicial S_0 (1) e a solução final S_f (2) do algoritmo SA-BL, o tempo t(s), em segundos, que o algoritmo levou para ser executado, e a melhoria percentual da solução final sobre a solução inicial, denotado por %gap (2-1). Também são apresentados os resultados do algoritmo SA-HLS de Leung *et al.* (2013) para o 2L-FSMVRP dados por S (3), e a diferença percentual dos resultados obtidos pelo

SA-BL para o 2L-HFFVRP e do resultado obtido pelo referido autor para o 2L-FSMVRP, representada por $\%gap$ (2-3).

TABELA 10 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 2 - CASO SEQUENCIAL

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	$\%gap$ (2-1)	S (3)	$\%gap$ (2-3)
1	808,95	748,92	1,33	-7,42	604,26	23,94
2	787,27	787,27	1,55	0,00	721,60	9,10
3	995,03	992,77	2,19	-0,23	772,90	28,45
4	926,88	874,62	1,14	-5,64	721,90	21,16
5	1096,27	1085,05	1,77	-1,02	799,80	35,66
6	1125,49	981,44	4,94	-12,80	828,80	18,42
7	8733,14	7899,65	8,30	-9,54	6534,35	20,89
8	9817,12	7677,86	12,80	-21,79	5097,06	50,63
9	1275,56	1255,57	3,45	-1,57	1034,94	21,32
10	11314,62	11094,93	16,53	-1,94	8342,56	32,99
11	11315,04	9091,68	43,72	-19,65	8410,74	8,10
12	1933,76	1933,71	0,77	0,00	1674,56	15,48
13	44776,25	35068,42	50,60	-21,68	28771,60	21,89
14	12760,47	12180,77	6,31	-4,54	11580,30	5,19
15	13536,25	11979,44	23,45	-11,50	11402,30	5,06
16	1722,07	1593,85	7,52	-7,45	1285,83	23,95
17	2388,97	2352,56	3,19	-1,52	1756,50	33,93
18	8805,59	7143,38	38,31	-18,88	6044,31	18,18
19	5857,82	5508,38	4,00	-5,97	4559,17	20,82
20	7491,37	7476,21	18,09	-0,20	6303,87	18,60
21	11428,71	11416,11	64,23	-0,11	9169,29	24,50
22	12386,49	11993,95	34,13	-3,17	9535,65	25,78
23	11696,89	11207,73	37,48	-4,18	9632,10	16,36
24	6559,22	6531,48	65,50	-0,42	5067,40	28,89
25	16384,02	15942,46	14,49	-2,70	13562,00	17,55
26	16542,24	16139,23	28,13	-2,44	12165,60	32,66
27	7328,45	7269,28	14,22	-0,81	5939,16	22,40
28	29570,36	28862,90	61,08	-2,39	24914,80	15,85
29	30265,01	28471,28	149,27	-5,93	22573,00	26,13
30	22238,40	22184,38	15,88	-0,24	17459,40	27,06
31	24597,59	24582,64	58,89	-0,06	22393,60	9,78
32	27819,25	27537,46	45,08	-1,01	22134,40	24,41
33	27280,81	27172,96	36,02	-0,40	22166,20	22,59
34	17394,14	17300,72	62,36	-0,54	15497,00	11,64
35	11408,15	11319,51	201,78	-0,78	9023,99	25,44
36	6181,23	6129,17	79,46	-0,84	4646,15	31,92
Média	11848,58	11160,77	33,83	-4,98	9253,53	22,13

Fonte – A autora (2016)

TABELA 11 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 3 - CASO SEQUENCIAL

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	745,68	735,91	1,19	-1,31	597,28	23,21
2	843,32	843,30	1,55	0,00	734,36	14,83
3	935,69	923,93	5,53	-1,26	791,54	16,72
4	970,85	919,36	1,36	-5,30	698,96	31,53
5	1245,75	1107,46	9,06	-11,10	838,34	32,10
6	1173,98	1168,72	0,67	-0,45	836,09	39,78
7	6885,87	6047,69	12,67	-12,17	5456,98	10,82
8	8550,33	8425,33	5,06	-1,46	6840,48	23,17
9	1401,67	1265,96	3,44	-9,68	1072,82	18,00
10	9596,31	7792,07	4,03	-18,80	7045,68	10,59
11	11815,41	10107,51	13,38	-14,45	9175,84	10,15
12	1848,35	1837,97	0,14	-0,56	1681,51	9,30
13	37876,09	28374,16	63,10	-25,09	26212,20	8,25
14	12882,97	12814,10	5,39	-0,53	11415,60	12,25
15	14115,28	12394,68	9,31	-12,19	11644,60	6,44
16	1603,44	1557,80	0,92	-2,85	1301,60	19,68
17	2537,55	2482,91	0,92	-2,15	1787,67	38,89
18	8497,09	7112,47	35,09	-16,30	5761,77	23,44
19	5992,41	5607,68	18,92	-6,42	4405,53	27,29
20	7359,23	7355,68	13,23	-0,05	6517,72	12,86
21	14030,73	13857,95	21,28	-1,23	10271,00	34,92
22	13393,09	13102,46	5,36	-2,17	9583,69	36,72
23	14360,12	13550,96	15,39	-5,63	9086,49	49,13
24	6467,44	5983,95	30,56	-7,48	4713,20	26,96
25	17063,49	16855,98	190,40	-1,22	12041,90	39,98
26	18007,61	17890,95	42,12	-0,65	12895,50	38,74
27	7407,12	7351,16	140,46	-0,76	6273,66	17,18
28	29930,20	29732,45	157,98	-0,66	24376,40	21,97
29	28657,67	28462,26	98,88	-0,68	22746,10	25,13
30	22185,47	21965,30	27,82	-0,99	18107,10	21,31
31	25536,74	25520,19	35,10	-0,06	23643,40	7,94
32	27463,83	27360,80	124,39	-0,38	21951,30	24,64
33	28174,32	27727,89	28,56	-1,58	23392,00	18,54
34	17408,57	17342,20	33,13	-0,38	15778,40	9,91
35	12322,50	12136,27	85,68	-1,51	9815,20	23,65
36	7175,24	7142,30	779,78	-0,46	4866,30	46,77
Média	11846,15	11,246,05	56,16	-4,67	9287,73	23,13

Fonte – A autora (2016)

TABELA 12 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 4 - CASO SEQUENCIAL

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	780,98	766,49	0,59	-1,86	614,99	24,63
2	839,78	795,09	0,98	-5,32	684,99	16,07
3	950,68	949,40	1,66	-0,13	765,74	23,99
4	973,68	923,92	3,75	-5,11	703,76	31,28
5	959,06	955,74	5,48	-0,35	805,20	18,70
6	1112,22	1009,15	2,45	-9,27	849,56	18,78
7	6746,57	6271,78	16,63	-7,04	5648,18	11,04
8	8316,15	7634,89	6,66	-8,19	6346,72	20,30
9	1250,60	1250,60	6,81	0,00	1052,67	18,80
10	10486,05	9662,33	5,80	-7,86	8408,75	14,91
11	12414,64	11487,79	14,69	-7,47	9947,59	15,48
12	1863,06	1863,04	0,47	0,00	1685,18	10,55
13	46781,50	40893,70	236,37	-12,59	28382,00	44,08
14	12060,79	11775,76	1,63	-2,36	10965,80	7,39
15	15351,66	14518,52	3,55	-5,43	12358,10	17,48
16	1717,19	1687,20	2,81	-1,75	1296,62	30,12
17	2437,06	2365,21	4,14	-2,95	1767,66	33,80
18	8978,74	8950,10	9,64	-0,32	6416,46	39,49
19	5808,65	5684,32	7,66	-2,14	4924,24	15,44
20	8046,41	7962,26	8,09	-1,05	6676,43	19,26
21	10877,09	10222,20	18,36	-6,02	8605,04	18,79
22	13423,78	13419,51	14,97	-0,03	9614,78	39,57
23	11379,97	11348,48	46,17	-0,28	9019,58	25,82
24	6688,39	6460,88	8,34	-3,40	4937,93	30,84
25	16981,19	16250,05	25,70	-4,31	12488,90	30,12
26	18561,42	18539,89	26,20	-0,12	14120,20	31,30
27	7045,12	6935,47	28,32	-1,56	5895,78	17,63
28	27857,88	27261,48	60,45	-2,14	24796,20	9,94
29	30005,32	29519,70	35,91	-1,62	24164,20	22,16
30	21135,85	21076,74	180,51	-0,28	17974,40	17,26
31	27159,57	26943,33	818,31	-0,80	24192,90	11,37
32	26856,77	26714,33	294,22	-0,53	22939,40	16,46
33	29056,30	28831,71	623,09	-0,77	24245,10	18,92
34	16692,94	16587,12	341,01	-0,63	16022,90	3,52
35	12579,73	12524,94	6279,58	-0,44	10042,10	24,72
36	6514,16	6447,94	89,12	-1,02	4643,86	38,85
Média	11963,64	11569,20	253,69	-2,92	9555,66	21,91

Fonte – A autora (2016)

TABELA 13 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 5 - CASO SEQUENCIAL

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	772,99	717,01	2,69	-7,24	596,07	20,29
2	835,19	775,50	0,70	-7,15	679,18	14,18
3	973,76	823,15	4,36	-15,47	757,06	8,73
4	915,26	882,78	1,67	-3,55	694,87	27,04
5	1041,49	982,69	8,77	-5,65	766,89	28,14
6	1154,46	941,64	9,78	-18,43	824,60	14,19
7	5957,45	5561,92	27,41	-6,64	5443,79	2,17
8	7051,62	5932,56	26,74	-15,87	4247,88	39,66
9	1367,61	1234,37	6,28	-9,74	1029,95	19,85
10	9100,85	7288,62	55,35	-19,91	7125,94	2,28
11	11174,44	7674,20	29,59	-31,32	6433,59	19,28
12	1923,02	1907,37	0,75	-0,81	1685,18	13,18
13	42370,49	26117,78	48,17	-38,36	23679,90	10,30
14	12397,77	11247,23	9,11	-9,28	10519,50	6,92
15	14331,00	13136,77	13,53	-8,33	12260,20	7,15
16	1707,27	1535,41	4,95	-10,07	1280,90	19,87
17	2381,86	2322,83	4,31	-2,48	1790,14	29,76
18	6962,65	5135,54	79,93	-26,24	4939,95	3,96
19	5052,06	3888,35	46,64	-23,03	3324,10	16,97
20	6661,06	5801,72	41,55	-12,90	5363,89	8,16
21	9068,33	7949,65	43,60	-12,34	5932,13	34,01
22	10525,59	9136,23	97,67	-13,20	6734,27	35,67
23	10879,36	8449,11	61,78	-22,34	6439,03	31,22
24	5649,62	5186,32	22,34	-8,20	4137,78	25,34
25	12751,40	11122,88	76,99	-12,77	8316,47	33,75
26	15228,55	12931,52	70,96	-15,08	10339,80	25,07
27	6837,92	6791,23	22,08	-0,68	5422,40	25,24
28	25778,50	23529,45	74,53	-8,72	20255,00	16,17
29	31599,64	27090,60	177,63	-14,27	22271,90	21,64
30	18487,95	16680,29	134,10	-9,78	12417,90	34,32
31	21197,02	21123,47	108,37	-0,35	17902,30	17,99
32	24096,98	22945,39	110,21	-4,78	16905,60	35,73
33	23293,33	21863,09	145,91	-6,14	17823,30	22,67
34	14886,32	14839,88	102,68	-0,31	12721,70	16,65
35	10759,51	10262,08	250,00	-4,62	8372,87	22,56
36	6312,42	5750,98	86,44	-8,89	4112,85	39,83
Média	10596,80	9154,43	55,76	-11,53	7598,58	20,83

Fonte – A autora (2016)

Observa-se que o algoritmo SA-BL melhorou as soluções iniciais em 4,98%, 4,67%, 2,92% e 11,53%, em média, para as Classes 2, 3, 4 e 5 respectivamente, como se pode ver na última linha da coluna %gap (2-1) de cada tabela. A Classe 5 foi a que obteve maior diferença média entre as soluções iniciais e finais. Embora nos problemas da Classe 5 o número de itens seja maior, as dimensões dos itens são menores, o que permite um maior número de possíveis carregamentos e, por consequência, maior número de soluções factíveis. As soluções para o 2L-HFFVRP Sequencial, com a composição da frota conforme foi estabelecido na TABELA 7, ficaram em torno de 22% piores que as soluções para o 2L-FSMVRP Sequencial, que dispõe de uma frota ilimitada de veículos.

Os resultados do caso Irrestrito para as Classes 2-5 são apresentados nas TABELAS 14-17, que apresentam a solução inicial S_0 (1) e a solução final S_f (2) do algoritmo

SA-BL, o tempo $t(s)$, em segundos, que o algoritmo levou para ser executado, e a melhoria percentual da solução final sobre a solução inicial, denotado por $\%gap$ (2-1). São ainda apresentados os resultados do algoritmo SA-HLS de Leung *et al.* (2013) para o 2L-FSMVRP dados por S (3), e a diferença percentual dos resultados obtidos pelo SA-BL para o 2L-HFFVRP e do resultado obtido pelo referido autor para o 2L-FSMVRP, representada por $\%gap$ (2-3).

TABELA 14 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 2 - CASO IRRESTRITO

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	$t(s)$	$\%gap$ (2-1)	S (3)	$\%gap$ (2-3)
1	773,93	728,40	2,14	-5,88	602,88	20,82
2	787,27	779,86	2,36	-0,94	702,45	11,02
3	976,83	949,84	1,47	-2,76	769,13	23,50
4	857,79	848,43	1,55	-1,09	697,06	21,72
5	1081,57	1040,43	6,27	-3,80	762,92	36,37
6	1193,10	926,92	0,31	-22,31	827,60	12,00
7	8409,53	7838,30	2,48	-6,79	6343,55	23,56
8	8196,06	7268,09	15,42	-11,32	5071,52	43,31
9	1265,12	1200,27	9,46	-5,13	1029,95	16,54
10	9427,27	9309,91	31,15	-1,24	8401,68	10,81
11	11712,49	8868,82	19,19	-24,28	8465,67	4,76
12	1933,76	1899,02	0,81	-1,80	1674,56	13,40
13	44694,25	28576,92	45,54	-36,06	27842,80	2,64
14	12225,57	11899,77	6,36	-2,66	10979,30	8,38
15	12421,13	11793,59	24,17	-5,05	11160,20	5,68
16	1663,05	1536,99	5,75	-7,58	1285,83	19,53
17	2402,42	2350,61	1,80	-2,16	1763,63	33,28
18	8443,55	6728,63	33,41	-20,31	6017,02	11,83
19	5544,23	5490,45	33,67	-0,97	4510,52	21,73
20	7149,56	7142,12	24,80	-0,10	6311,25	13,16
21	10930,22	10241,88	64,53	-6,30	8745,10	17,12
22	11318,72	11248,09	26,35	-0,62	9041,16	24,41
23	11449,34	11122,24	31,61	-2,86	9280,84	19,84
24	6174,22	6174,16	18,58	0,00	4941,33	24,95
25	14719,82	14687,26	22,27	-0,22	12822,20	14,55
26	15161,73	15039,38	14,14	-0,81	11993,00	25,40
27	7158,71	6947,03	39,05	-2,96	5683,65	22,23
28	26735,26	26588,88	43,83	-0,55	23463,50	13,32
29	29829,43	27911,88	176,34	-6,43	22243,80	25,48
30	20622,93	20541,31	50,71	-0,40	16752,30	22,62
31	24913,24	24872,44	67,74	-0,16	21906,60	13,54
32	27986,98	26027,61	17,76	-7,00	21729,60	19,78
33	26107,43	26035,56	64,55	-0,28	21971,70	18,50
34	16669,36	16617,60	32,24	-0,31	15115,50	9,94
35	10845,91	10797,50	193,74	-0,45	8765,86	23,18
36	6137,65	6119,24	35,55	-0,30	4475,44	36,73
Média	11331,10	10504,15	32,42	-5,33	9004,20	19,04

Fonte – A autora (2016)

TABELA 15 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 3 - CASO IRRESTRITO

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	717,73	717,70	2,33	0,00	589,15	21,82
2	843,32	843,30	0,77	0,00	730,22	15,49
3	949,06	882,50	3,67	-7,01	790,74	11,60
4	948,15	768,88	0,45	-18,91	697,06	10,30
5	1148,83	1094,18	3,59	-4,76	833,68	31,25
6	1230,19	991,10	0,69	-19,44	836,09	18,54
7	6772,80	5890,47	8,52	-13,03	5216,26	12,93
8	8238,31	7796,47	13,37	-5,36	6820,56	14,31
9	1337,31	1131,90	7,77	-15,36	1029,95	9,90
10	8256,22	7723,45	39,61	-6,45	6853,97	12,69
11	12051,87	9621,59	10,81	-20,17	8751,56	9,94
12	1848,35	1822,32	0,42	-1,41	1681,51	8,37
13	41775,38	26478,76	6,53	-36,62	25454,10	4,03
14	12468,99	12468,97	2,25	0,00	11176,90	11,56
15	13870,04	11843,32	4,42	-14,61	11227,40	5,49
16	1571,24	1524,98	1,41	-2,94	1300,95	17,22
17	2537,55	2416,29	1,78	-4,78	1787,84	35,15
18	7605,43	7101,14	31,71	-6,63	5680,14	25,02
19	5749,61	5212,64	24,10	-9,34	4371,60	19,24
20	7122,66	7121,92	27,82	-0,01	6334,52	12,43
21	11978,21	11909,03	8,00	-0,58	9917,98	20,08
22	12418,40	11904,86	19,15	-4,14	9323,96	27,68
23	12216,95	11368,86	18,67	-6,94	8809,96	29,05
24	5973,20	5928,69	26,58	-0,75	4558,84	30,05
25	16667,86	16530,22	100,77	-0,83	11576,60	42,79
26	17525,81	16914,83	30,57	-3,49	12337,50	37,10
27	7565,26	7504,13	4,80	-0,81	6109,92	22,82
28	29330,49	29283,50	22,94	-0,16	24720,80	18,46
29	29942,08	26929,72	80,35	-10,06	21060,20	27,87
30	23206,61	21469,78	29,17	-7,48	17092,60	25,61
31	24914,50	24914,42	42,50	0,00	21905,90	13,73
32	27397,60	25927,25	46,56	-5,37	20896,30	24,08
33	27822,70	27051,70	10,34	-2,77	23063,20	17,29
34	17982,00	17278,20	15,47	-3,91	15374,20	12,38
35	12216,56	11728,76	53,03	-3,99	9412,89	24,60
36	7009,60	7001,39	1192,35	-0,12	4689,83	49,29
Média	11700,30	10,752,70	52,59	-6,62	8972,64	20,28

Fonte – A autora (2016)

TABELA 16 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 4 - CASO IRRESTRITO

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	780,40	764,95	0,97	-1,98	614,99	24,38
2	839,78	739,64	8,16	-11,92	684,99	7,98
3	970,87	920,57	0,66	-5,18	765,74	20,22
4	949,11	910,08	1,42	-4,11	703,76	29,32
5	1050,18	901,61	3,61	-14,15	788,78	14,30
6	1072,08	993,98	6,58	-7,28	837,00	18,76
7	6746,57	5768,84	12,64	-14,49	5574,00	3,50
8	6858,20	6858,18	7,39	0,00	6538,33	4,89
9	1250,60	1250,58	6,91	0,00	1052,62	18,81
10	10192,53	9252,24	18,08	-9,23	8072,01	14,62
11	11851,59	11060,52	14,94	-6,67	9699,32	14,03
12	1863,06	1837,86	1,09	-1,35	1683,02	9,20
13	36722,07	36719,08	40,57	-0,01	27585,40	33,11
14	11859,52	11426,79	8,67	-3,65	10809,90	5,71
15	14981,87	14063,98	8,28	-6,13	11900,50	18,18
16	1780,37	1680,49	2,59	-5,61	1299,81	29,29
17	2437,06	2293,37	3,36	-5,90	1788,18	28,25
18	7816,10	7091,75	36,78	-9,27	6283,94	12,86
19	5616,02	5613,96	27,75	-0,04	4781,83	17,40
20	7641,32	7509,86	27,77	-1,72	6655,06	12,84
21	10606,72	10290,81	44,64	-2,98	8393,49	22,60
22	13668,01	13178,63	28,13	-3,58	9301,88	41,68
23	11690,07	10242,92	30,19	-12,38	8727,79	17,36
24	6281,32	5935,26	18,86	-5,51	4698,84	26,31
25	15905,36	15896,39	13,81	-0,06	12784,20	24,34
26	18114,39	18103,92	10,22	-0,06	13039,90	38,83
27	7476,20	6877,24	19,66	-8,01	5689,62	20,87
28	28494,43	27136,30	72,80	-4,77	23517,90	15,39
29	31009,80	28899,66	134,13	-6,80	23039,10	25,44
30	21113,63	21037,09	53,44	-0,36	17144,30	22,71
31	25705,88	25646,75	89,02	-0,23	23197,60	10,56
32	26096,65	26070,26	126,05	-0,10	21835,80	19,39
33	28633,58	28586,36	40,74	-0,16	23267,20	22,86
34	16906,80	16447,94	1380,72	-2,71	15347,00	7,17
35	12144,46	12086,81	124,30	-0,47	9594,11	25,98
36	6489,27	6202,70	35,86	-4,42	4425,41	40,16
Média	11489,33	11,119,37	68,36	-4,48	9225,65	19,98

Fonte – A autora (2016)

TABELA 17 – RESULTADOS PARA AS INSTÂNCIAS DA CLASSE 5 - CASO IRRESTRITO

Instância	SA-BL				SA-HLS	
	S_0 (1)	S_f (2)	t(s)	%gap (2-1)	S (3)	%gap (2-3)
1	766,20	691,11	0,98	-9,80	596,07	15,94
2	835,19	746,97	0,97	-10,56	679,18	9,98
3	973,76	793,32	5,19	-18,53	754,87	5,09
4	871,21	840,57	2,81	-3,52	694,87	20,97
5	1041,49	979,12	6,33	-5,99	761,97	28,50
6	1097,57	898,31	8,83	-18,15	824,60	8,94
7	6333,01	5462,57	50,21	-13,74	5386,27	1,42
8	7051,62	5722,65	32,47	-18,85	3979,98	43,79
9	1444,74	1193,64	9,45	-17,38	1029,95	15,89
10	9100,85	6805,38	25,51	-25,22	7172,52	-5,12
11	10077,33	7527,23	13,54	-25,31	6402,22	17,57
12	1923,02	1876,59	3,66	-2,41	1685,18	11,36
13	41711,36	25731,78	19,61	-38,31	23032,40	11,72
14	12148,21	10814,22	23,36	-10,98	10510,20	2,89
15	13542,47	12972,19	1,50	-4,21	11672,30	11,14
16	1707,27	1507,66	5,81	-11,69	1280,90	17,70
17	2381,86	2223,61	9,38	-6,64	1766,50	25,88
18	6495,40	4916,83	51,32	-24,30	4723,56	4,09
19	4865,67	3719,01	31,78	-23,57	3305,97	12,49
20	6304,26	5604,96	46,63	-11,09	5312,39	5,51
21	8731,93	6705,61	44,63	-23,21	5826,53	15,09
22	10690,15	8392,25	43,47	-21,50	6630,77	26,57
23	10169,79	8324,13	44,24	-18,15	6447,68	29,10
24	5343,50	4595,31	40,41	-14,00	3992,34	15,10
25	12598,32	10871,36	83,40	-13,71	8288,69	31,16
26	14692,55	12688,52	49,91	-13,64	9755,44	30,07
27	6813,52	6209,56	53,11	-8,86	5297,72	17,21
28	25795,08	23513,68	63,69	-8,84	18741,70	25,46
29	28210,25	25390,34	105,19	-10,00	21161,60	19,98
30	19023,63	16278,56	72,83	-14,43	12183,20	33,61
31	22018,55	20705,47	87,52	-5,96	17491,70	18,37
32	23254,47	21733,38	82,02	-6,54	15981,00	36,00
33	23846,20	21800,78	87,24	-8,58	17376,30	25,46
34	14126,49	14052,39	47,97	-0,52	12101,40	16,12
35	10604,59	9944,08	118,86	-6,23	8075,70	23,14
36	6377,59	5730,47	32,78	-10,15	3952,45	44,99
Média	10360,25	8832,32	39,07	-13,46	7357,67	18,70

Fonte – A autora (2016)

O algoritmo SA-BL melhorou as soluções iniciais, em média, em 5,33%, 6,62%, 4,48% e 13,46% para as Classes 2, 3, 4 e 5, respectivamente, como pode ser visto na última linha da coluna %gap (2-1) de cada tabela. Assim como no caso Sequencial, a Classe 5 foi a que apresentou maior diferença média entre as soluções inicial e final. Em relação ao 2L-FSMVRP Irrestrito, as soluções para o 2L-HFFVRP Irrestrito foram cerca de 20% piores, o que era esperado visto que a frota de veículos é limitada.

As soluções obtidas para o caso Irrestrito do 2L-HFFVRP foram melhores que as soluções obtidas para o caso Sequencial do problema, exceto para a instância 27 da Classe 3, na qual o custo da solução no caso Sequencial foi menor. De fato, como o algoritmo tem natureza estocástica, converge para um ótimo local, que nem sempre é uma boa solução.

O tempo computacional necessário para resolver cada instância foi satisfatório,

sendo que na grande maioria das instâncias o tempo gasto foi inferior a 1 minuto. Algumas instâncias (instância 35 - classe 4 no caso Sequencial, instância 36 - Classe 3 e instância 34 - Classe 4 no caso Irrestrito) demandaram muito tempo para serem resolvidas. Grande parte deste tempo foi gasto na construção da solução inicial, pois foram necessários muitos reinícios do algoritmo para encontrar uma solução inicial factível.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e Restrições Bidimensionais de Carregamento (2L-HFFVRP), que integra o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Heterogênea Fixa e o Problema do *Bin Packing* bidimensional. Para o 2L-HFFVRP foram consideradas duas variações: o caso Sequencial, no qual os itens de um cliente devem ser descarregados sem a movimentação dos outros itens carregados no veículo; e o caso Irrestrito que não leva em conta esta restrição.

Em uma primeira etapa deste estudo, foi proposto um modelo de programação matemática para representar o 2L-HFFVRP, incluindo restrições desenvolvidas para modelar o carregamento sequencial. Foram realizados experimentos computacionais com este modelo, utilizando o *solver* CPLEX para resolver problemas gerados a partir de instâncias da literatura. Os resultados mostraram que o modelo proposto é capaz de representar matematicamente o problema estudado. No entanto, o modelo proposto é capaz de encontrar soluções ótimas, em um tempo computacional aceitável, apenas para problemas bem pequenos, ou seja, com poucos clientes, poucos veículos e poucos itens a serem carregados. Também verificou-se que as características geométricas dos itens interfere nas possibilidades de arranjo dos mesmos nos veículos, o que contribui para a complexidade do problema e para a dificuldade do modelo em encontrar a solução ótima do problema em tempo computacional reduzido. Apesar da limitação computacional, que torna a utilização do modelo matemático proposto inviável para a resolução de problema reais, este estudo pode ser usado como ponto de partida para outros estudos, que explorem métodos exatos ou heurísticos de solução do problema, ou até mesmo para outras formulações para o 2L-HFFVRP ou para variações dele.

Como o modelo matemático proposto mostrou-se capaz de resolver apenas problemas pequenos, em uma segunda etapa deste estudo foi desenvolvido um algoritmo meta-heurístico que combina *Simulated Annealing* e Busca Local, denominado SA-BL, para resolução do 2L-HFFVRP, capaz de resolver instâncias maiores, mais condizentes com os problemas reais. Para verificar a factibilidade dos roteiros, foi utilizado um conjunto de 8 heurísticas para determinar o carregamento dos veículos, 5 delas foram obtidas da literatura, e 3 foram propostas neste trabalho. Experimentos computacionais foram realizados para testar o algoritmo SA-BL para resolver problemas propostos na literatura, com até 255 clientes, 95 veículos e 786 itens. Os resultados mostraram que o método proposto é capaz de resolver problemas grandes em um tempo computacional reduzido, apesar de não haver garantia de que as soluções obtidas pelo SA-BL sejam ótimas, já que se trata de uma meta-heurística. Aliás, no que diz respeito à qualidade das soluções, acredita-se que as mesmas sejam promissora e passíveis de melhoria.

Muitas oportunidades de estudo emergem deste trabalho, dentre as quais se pode

citar: (i) aprimorar o algoritmo SA-BL, através da criação de outros esquemas de vizinhança, associação com outra meta-heurística, como por exemplo a Busca Tabu, para evitar que as soluções já avaliadas sejam revisitadas, desenvolvimento de outras heurísticas para o carregamento bidimensional, ou ainda a implementação paralela do algoritmo, que o tornaria mais rápido; (ii) considerar a extensão do 2L-HFFVRP com possibilidade de rotação dos itens; (iii) estender para o 3L-HFFVRP o que foi desenvolvido e proposto neste trabalho, isto é, a formulação matemática e o algoritmo SA-BL, fazendo as modificações necessárias para contemplar o problema tridimensional.

REFERÊNCIAS

- BALDACCI, R.; BATTARRA, M.; VIGO, D. Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In: GOLDEN, B.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.]: Springer US, 2008. v. 43, p. 3–27.
- BALDACCI, R.; CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. **Mathematical Programming**, v. 115, n. 2, p. 351–385, 2008.
- BALDACCI, R.; MINGOZZI, A. A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. **Mathematical Programming**, v. 120, n. 2, p. 347–380, 2009.
- BEASLEY, J. Route first - cluster second methods for vehicle routing. **Omega**, v. 11, n. 4, p. 403–408, 1983.
- BEASLEY, J. E. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. **Operations Research**, v. 33, n. 1, p. 49–64, 1985.
- BELFIORE, P. P.; FAVERO, L. P. L.; ALVAREZ, R. A. G. Problema de roteirização de veículos com frota heterogênea: Revisão de literatura. In: XXXVIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2006, Goiânia. **Anais...** Goiânia: Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, 2006.
- BEN-AMEUR, W. Computing the initial temperature of simulated annealing. **Computational Optimization and Applications**, v. 29, n. 3, p. 369–385, 2004.
- BERKEY, J. O.; WANG, P. Y. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. **The Journal of the Operational Research Society**, v. 38, n. 5, p. pp. 423–429, 1987.
- BODIN, L. D. *et al.* Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of the art. **Computers & Operations Research**, v. 10, n. 2, p. 63–211, 1983.
- BORTFELDT, A.; WASCHER, G. Constraints in container loading - a state-of-the-art review. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 1, p. 1–20, 2013.
- BOUSSAÏD, I.; LEPAGNOT, J.; SIARRY, P. A survey on optimization metaheuristics. **Information Sciences**, v. 237, p. 82 – 117, 2013.
- BRAMEL, J.; SIMCHI-LEVI, D. Set-covering-based algorithms for the capacitated VRP. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 85–108.
- BRANDÃO, J. A tabu search algorithm for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 38, n. 1, p. 140–151, 2011.
- ČERNÝ, V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 45, n. 1, p. 41–51, 1985.
- CHEN, C.; LEE, S.; SHEN, Q. An analytical model for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 80, n. 1, p. 68–76, 1995.

- CHUNG, F. R. K.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. On packing two-dimensional bins. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 3, n. 1, p. 66–76, 1982.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. **Operations Research**, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964.
- CORDEAU, J.-F. *et al.* New heuristics for the vehicle routing problem. In: LANGEVIN, A.; RIOPEL, D. (Ed.). **Logistics Systems: Design and Optimization**. [S.l.]: Springer US, 2005. p. 279–297.
- CORDEAU, J.-F. *et al.* Vehicle routing. In: BARNHART, C.; LAPORTE, G. (Ed.). **Transportation**. [S.l.]: Elsevier, 2007. v. 14, p. 367–428.
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959.
- DOMINGUEZ, O. *et al.* Using biased randomization for solving the two-dimensional loading vehicle routing problem with heterogeneous fleet. **Annals of Operations Research**, p. 1–22, 2014.
- DOMINGUEZ, O.; JUAN, A. A.; FAULIN, J. A biased-randomized algorithm for the two-dimensional vehicle routing problem with and without item rotations. **International Transactions in Operational Research**, v. 21, n. 3, p. 375–398, 2014.
- DOWSLAND, K. A.; DOWSLAND, W. B. Packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 56, n. 1, p. 2–14, 1992.
- DUHAMEL, C. *et al.* A multi-start evolutionary local search for the two-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 38, n. 3, p. 617–640, 2011.
- DYCKHOFF, H.; FINKE, U. **Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and bibliography**. New York: [s.n.], 1992.
- EGLESE, R. Simulated annealing: A tool for operational research. **European Journal of Operational Research**, v. 46, n. 3, p. 271–281, 1990.
- FISHER, M. Vehicle routing. In: BALL T.L. MAGNANTI, C. M. M.; NEMHAUSER, G. (Ed.). **Network Routing**. [S.l.]: Elsevier, 1995. v. 8, p. 1–33.
- FISHER, M. L.; JAIKUMAR, R. A generalized assignment heuristic for vehicle routing. **Networks**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 11, n. 2, p. 109–124, 1981.
- FUELLERER, G. *et al.* Ant colony optimization for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 36, n. 3, p. 655–673, 2009.
- FUKASAWA, R. *et al.* Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. **Mathematical Programming**, v. 106, n. 3, p. 491–511, 2006.
- GENDREAU, M. *et al.* A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. **Transportation Science**, v. 40, n. 3, p. 342–350, 2006.
- GENDREAU, M. *et al.* A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Networks**, v. 51, n. 1, p. 4–18, 2008.

GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.-Y. Metaheuristics for the capacitated vrp. In: TOOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 129–154.

GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. Metaheuristics in combinatorial optimization. **Annals of Operations Research**, v. 140, n. 1, p. 189–213, 2005.

GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. **Handbook of Metaheuristics**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2010. ISBN 1441916636, 9781441916631.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. **Operations Research**, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965.

GOLDEN, B. *et al.* The fleet size and mix vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 11, n. 1, p. 49–66, 1984.

GOLDEN, B.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. **The vehicle routing problem: latest advances and new challenges**. [S.l.]: Springer, 2008. (Operations research/Computer science interfaces series, 43).

GOLDSTEIN, L.; WATERMAN, M. Neighborhood size in the simulated annealing algorithm. **American Journal of Mathematical and Management Sciences**, v. 8, n. 3-4, p. 409–423, 1988.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 2, p. 179–190, 2012.

HAJEK, B. Cooling schedules for optimal annealing. **Mathematics of Operations Research**, INFORMS, v. 13, n. 2, p. 311–329, 1988.

HENDERSON, D.; JACOBSON, S. H.; JOHNSON, A. W. The theory and practice of simulated annealing. In: _____. **Handbook of Metaheuristics**. Boston, MA: Springer US, 2003. p. 287–319.

HIFI, M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: a comparative study. **Computers & Operations Research**, v. 31, n. 5, p. 657–674, 2004.

IORI, M. **Metaheuristic Algorithms for Combinatorial Optimization Problems**. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Bologna, Bologna, Italia, 2004.

IORI, M.; MARTELLO, S. Routing problems with loading constraints. **TOP**, v. 18, n. 1, p. 4–27, 2010.

IORI, M.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J.-J.; VIGO, D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **Transportation Science**, v. 41, n. 2, p. 253–264, 2007.

JOHNSON, D. S. *et al.* Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part i, graph partitioning. **Operations Research**, v. 37, n. 6, p. 865–892, 1989.

JOHNSON, D. S. *et al.* Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part ii, graph coloring and number partitioning. **Oper. Res.**, INFORMS, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, v. 39, n. 3, p. 378–406, 1991.

JUNQUEIRA, L. **Modelos e Algoritmos para Problemas Integrados de Roteamento e Carregamento de Veículos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Mip-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. **Annals of Operations Research**, v. 199, n. 1, p. 51–75, 2012a.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012b.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. ISSN 0036-8075.

LAHYANI, R.; KHEMAKHEM, M.; SEMET, F. Rich vehicle routing problems: From a taxonomy to a definition. **European Journal of Operational Research**, v. 241, n. 1, p. 1–14, 2015.

LAPORTE, G. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. **European Journal of Operational Research**, v. 59, n. 3, p. 345–358, 1992.

LAPORTE, G. What you should know about the vehicle routing problem. **Naval Research Logistics (NRL)**, v. 54, n. 8, p. 811–819, 2007.

LAPORTE, G. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, v. 43, n. 4, p. 408–416, 2009.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. Exact algorithms for the vehicle routing problem. In: MARTELLO GILBERT LAPORTE, M. M. S.; RIBEIRO, C. (Ed.). **Surveys in Combinatorial Optimization**. [S.l.]: North-Holland, 1987. v. 132, p. 147–184.

LAPORTE, G.; OSMAN, I. Routing problems: A bibliography. **Annals of Operations Research**, v. 61, n. 1, p. 227–262, 1995.

LAPORTE, G.; SEMET, F. Classical heuristics for the capacitated vrp. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 109–128.

LEUNG, S. C. *et al.* A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 225, n. 2, p. 199–210, 2013.

LEUNG, S. C. *et al.* Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 38, n. 1, p. 205–215, 2011.

- LI, F.; GOLDEN, B.; WASIL, E. A record-to-record travel algorithm for solving the heterogeneous fleet vehicle routing problem. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 9, p. 2734–2742, 2007.
- LI, X.; TIAN, P.; ANEJA, Y. An adaptive memory programming metaheuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 46, n. 6, p. 1111–1127, 2010.
- LIN, S. Computer solutions of the traveling salesman problem. **Bell System Technical Journal**, v. 44, n. 10, p. 2245–2269, 1965.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: A survey. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 241–252, 2002.
- LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Recent advances on two-dimensional bin packing problems. **Discrete Applied Mathematics**, v. 123, n. 1-3, p. 379–396, 2002.
- LOPES, H. S.; RODRIGUES, L. C. de A.; STEINER, M. T. A. (Ed.). **Meta-Heurísticas em Pesquisa Operacional**. 1. ed. Curitiba, PR: Omnipax, 2013. ISBN 978-85-64619-10-4.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, v. 48, n. 2, p. 256–267, 2000.
- NADDEF, D.; RINALDI, G. Branch-and-cut algorithms for the capacitated vrp. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 53–84.
- OSMAN, I. H.; LAPORTE, G. Metaheuristics: A bibliography. **Annals of Operations Research**, v. 63, n. 5, p. 511–623, 1996.
- PENNA, P. H. V.; SUBRAMANIAN, A.; OCHI, L. S. An iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. **Journal of Heuristics**, v. 19, n. 2, p. 201–232, 2013.
- POLLARIS, H. *et al.* Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. **OR Spectrum**, v. 37, n. 2, p. 297–330, 2015.
- ROMEO, F.; SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A. A theoretical framework for simulated annealing. **Algorithmica**, v. 6, n. 1, p. 302–345, 1991.
- ROMEO, F. I. **Simulated Annealing: Theory and Applications to Layout Problems**. Tese (Doutorado) — EECS Department, University of California, Berkeley, 1989.
- SUBRAMANIAN, A. *et al.* A hybrid algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 221, n. 2, p. 285–295, 2012.
- TAILLARD, E. A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP. **RAIRO - Operations Research**, v. 33, n. 1, p. 1–14, 1999.
- TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T.; VASSILIADIS, V. S. A threshold accepting metaheuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 152, n. 1, p. 148–158, 2004.

TOTH, P.; VIGO, D. An overview of vehicle routing problems. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002a. p. 1–26.

TOTH, P.; VIGO, D. Branch-and-bound algorithms for the capacitated vrp. In: TOTH, P.; VIGO, D. (Ed.). **The Vehicle Routing Problem**. [S.l.: s.n.], 2002b. p. 29–51.

WANG, F.; TAO, Y.; SHI, N. A survey on vehicle routing problem with loading constraints. In: **International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization**. [S.l.: s.n.], 2009. v. 2, p. 602–606.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007.

WATERS, J. C. D. A solution procedure for the vehicle-scheduling problem based on iterative route improvement. **Journal of the Operational Research Society**, v. 38, n. 9, p. 833–839, 1987.

WEI, L. *et al.* A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 243, n. 3, p. 798 – 814, 2015.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 195, n. 3, p. 729–743, 2009.

ZACHARIADIS, E. E.; TARANTILIS, C. D.; KIRANOUDIS, C. T. Integrated distribution and loading planning via a compact metaheuristic algorithm. **European Journal of Operational Research**, v. 228, n. 1, p. 56–71, 2013.